



**Titre:** Étude des facteurs d'influence d'un faisceau de cylindres dans un  
écoulement transverse à bas régime

**Auteur:** Romain Watteaux  
Author:

**Date:** 2008

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Watteaux, R. (2008). Étude des facteurs d'influence d'un faisceau de cylindres  
dans un écoulement transverse à bas régime [Mémoire de maîtrise, École  
Citation: Polytechnique de Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/8370/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**  
Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/8370/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de  
recherche:**  
Advisors:

**Programme:** Non spécifié  
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉTUDE DES FACTEURS D'INFLUENCE D'UN FAISCEAU DE CYLINDRES  
DANS UN ÉCOULEMENT TRANSVERSE À BAS RÉGIME

ROMAIN WATTEAUX  
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES  
(GÉNIE MÉCANIQUE)

MAI 2008



Library and  
Archives Canada

Published Heritage  
Branch

395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

Bibliothèque et  
Archives Canada

Direction du  
Patrimoine de l'édition

395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

*Your file    Votre référence*

*ISBN: 978-0-494-46086-3*

*Our file    Notre référence*

*ISBN: 978-0-494-46086-3*

**NOTICE:**

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

**AVIS:**

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

---

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

ÉTUDE DES FACTEURS D'INFLUENCE D'UN FAISCEAU DE CYLINDRES  
DANS UN ÉCOULEMENT TRANSVERSE À BAS RÉGIME

présenté par: WATTEAUX Romain

en vue de l'obtention du diplôme de: Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. GARON André, Ph.D., président

M. MUREITHI Njuki, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. PELLETIER Dominique, Ph.D., membre et codirecteur de recherche

M. JANZEN Victor, Ph.D., membre

Parce qu'il faut aimer la science.

## REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier très sincèrement mes directeurs de recherche, messieurs Dominique Pelletier et Njuki Mureithi qui m'ont permis de me lancer tête première dans cette belle aventure que fût ce projet de recherche.

Je remercie également très sincèrement, et avec toute ma gratitude, celui que j'appellerai officieusement mon troisième directeur de recherche, à savoir Stéphane Étienne. Sa patience, son intérêt et surtout son expertise, dans le domaine dans lequel j'ai travaillé pour ce projet, m'ont été d'une utilité inestimable. Sans lui, on me verrait encore devant l'ordinateur à me tirer les cheveux. Et je ne parle pas bien sûr de sa bonne humeur et son bon caractère qui savent établir une atmosphère de travail détendue et conviviale au sein du laboratoire en recherche numérique.

Du côté expérimental, je remercie aussi sincèrement Thierry Lafrance pour ses connaissances et son savoir-faire qui m'ont été utiles au moment de la conception et de la construction du système expérimental.

Ensuite, s'il y a bien quelque chose dont on se rend compte après un long projet de recherche, c'est qu'on en serait pas là sans toutes ces personnes présentes au jour le jour autour de vous. Je tiens donc à remercier très sincèrement tous les étudiant(e)s des deux laboratoires de recherche dans lesquels j'ai évolué durant cette maîtrise. Je pense à Cédric, Jean-François, Isabelle, Thomas et bien d'autre encore pour le laboratoire d'Interaction Fluide-Structure, et Lise, Jean-François, Jean-Serge, Richard et bien d'autre aussi pour le laboratoire en analyse numérique. Tous ont su m'apporter leur soutien, leurs bonnes idées et bien sûr leur amitié tout au long de cette maîtrise.

Enfin, je tiens à remercier aussi beaucoup tous mes ami(e)s du monde extérieur pour leur soutien, leur curiosité et surtout leur patience durant mes périodes intensives

de râle. Il faut le dire, sans vous tous, j'aurais tourné zinzin ! Même si je ne vous cite pas un par un, le coeur y est.

Et dernièrement, je remercie mes parents pour tout l'appui et les encouragements qu'ils m'ont apporté tout au long de cette maîtrise.

## RÉSUMÉ

Ce mémoire présente une étude numérique des facteurs d'influence, ou dérivées de stabilité, d'un faisceau de cylindres dans un écoulement transverse à bas nombre de Reynolds. Cette étude vise à évaluer l'utilité de la méthode numérique des équations de sensibilité (MES) utilisée pour déterminer les dérivées de stabilité des cylindres. On considère donc un écoulement visqueux, incompressible, stationnaire et à faible nombre de Reynolds. On résout le problème de manière implicite par une méthode d'éléments finis adaptative. Les inconnues du problème sont la vitesse du fluide et la pression, à partir desquelles on calcule les forces induites par l'écoulement sur les cylindres du faisceau. On résout ensuite les équations de sensibilité par rapport aux coordonnées du centroïde des cylindres, ce qui nous permet d'obtenir les dérivées de stabilité ou encore les facteurs d'influence du faisceau. On compare ici les prédictions à des mesures en laboratoire faites sur un montage expérimental conçu et construit pour reproduire les conditions d'écoulement et de régime de la simulation numérique. On discute de la conception du montage et les différentes techniques expérimentales nécessaires à la bonne mesure des dérivées de stabilité. La première confrontation nous amène à réviser notre modèle mathématique de l'écoulement. Nous présentons le nouveau modèle analytique/numérique développé et comparons finalement les résultats avec ceux expérimentaux pour en tirer les conclusions nécessaires. Nous terminons enfin par l'ouverture du sujet de recherche sur des conditions d'écoulement à plus haut nombre de Reynolds.

La confrontation des mesures et des prédictions confirme l'utilité de la MES et justifie la poursuite de son développement pour traiter des régimes d'écoulement plus réalistes.



## ABSTRACT

This master's thesis presents a numerical study of the intercylinder coupling effects, or stability derivatives, in a bundle of tubes. This study investigates the potential of the Sensitivity Equations Method (SEM) as a tool for determining those stability derivatives. We consider a viscous, incompressible, steady and low Reynolds number flow. We solve the problem with an implicit adaptive finite element method. The unknowns are the fluid velocity and pressure, from which we obtain the flow induced forces. The sensitivity equations are solved using the cylinder centroids coordinates as a parameter to obtain the stability derivatives. We compare numerical predictions to measurements done in an experimental loop designed and build to recreate the flow regime of the numerical simulation. We discuss the design of the system and the experimental methods needed to obtain good measurements of the stability derivatives. The preliminary comparison forced us to revise and modify our mathematical modeling of the flow. We present then the modified analytical/numerical model and compare the results with the experimental ones to draw the conclusions. We close by discussion of new main avenues to take for future works.

Thus, the confrontation of numerical predictions and experimental results confirm the potential usefulness of the SEM and justify the continuation of its development for more realistic flows.

**TABLE DES MATIÈRES**

DÉDICACE . . . . .	iv
REMERCIEMENTS . . . . .	v
RÉSUMÉ . . . . .	vii
ABSTRACT . . . . .	viii
TABLE DES MATIÈRES . . . . .	ix
LISTE DES FIGURES . . . . .	xiv
LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES . . . . .	xvii
LISTE DES TABLEAUX . . . . .	xxi
LISTE DES ANNEXES . . . . .	xxiii
INTRODUCTION . . . . .	1
CHAPITRE 1 REVUE BIBLIOGRAPHIQUE . . . . .	4
1.1 Phénomènes induisant des vibrations . . . . .	4
1.2 Instabilité fluide-élastique . . . . .	5
1.2.1 Les modèles théoriques . . . . .	7
1.2.2 Comparaison des modèles . . . . .	10
1.3 Pourquoi la Méthode des Équations de Sensibilités? . . . . .	11
1.4 Méthode des Équations de Sensibilités . . . . .	11
1.5 Objectifs de la maîtrise . . . . .	13

CHAPITRE 2	MODÉLISATION ANALYTIQUE DU PHÉNOMÈNE D'INSTABILITÉ FLUIDÉLASTIQUE . . . . .	14
2.1	Configuration de faisceau . . . . .	14
2.2	Équations de mouvement . . . . .	15
2.3	Configuration caractéristique . . . . .	16
2.4	Forces induites . . . . .	17
2.5	Coefficients de forces . . . . .	18
2.5.1	Déplacement apparent . . . . .	19
2.5.2	Temps de latence . . . . .	21
2.6	Résolution des équations de mouvement . . . . .	22
2.7	Méthodes d'analyse des modes contraints . . . . .	28
CHAPITRE 3	MÉTHODES NUMÉRIQUES . . . . .	32
3.1	Équations pour le fluide . . . . .	32
3.2	Méthode des Équations de Sensibilité . . . . .	33
3.2.1	Généralités . . . . .	33
3.2.2	Équations de sensibilité . . . . .	38
3.2.3	Conditions aux limites pour les sensibilités . . . . .	39
3.3	Forces résultantes et leurs sensibilités . . . . .	42
3.3.1	Forces résultantes . . . . .	42
3.3.2	Dérivées des forces résultantes . . . . .	42
3.4	Méthode des éléments finis . . . . .	45
3.4.1	Formulation faible des équations et discrétisation . . . . .	45
3.4.2	Méthodes de résolution . . . . .	46
3.4.2.1	Méthode des reactions . . . . .	46
3.4.2.2	Méthode de Newton Raphson . . . . .	48
3.5	Maillage adaptatif . . . . .	50

CHAPITRE 4	RÉSULTATS NUMÉRIQUES . . . . .	53
4.1	Définition de l'étude . . . . .	53
4.2	Résultats numériques . . . . .	55
4.2.1	Vérification des résultats . . . . .	55
4.2.2	Résultats . . . . .	60
4.2.2.1	Écoulement et sensibilité d'écoulement . . . . .	60
4.2.2.2	Coefficients de forces et sensibilités . . . . .	63
4.3	Détermination du domaine d'instabilité d'une configuration de cylindre ultra-flexible . . . . .	67
CHAPITRE 5	CONCEPTION DU MONTAGE ET MÉTHODES EXPÉRIMENTALES . . . . .	68
5.1	Conception du montage . . . . .	68
5.1.1	Cahier des charges . . . . .	69
5.1.2	Conception de la section d'essai . . . . .	71
5.1.3	Système de mesure . . . . .	72
5.1.4	Système d'écoulement . . . . .	73
5.1.4.1	Calcul théorique de la vitesse d'écoulement dans la section . . . . .	73
5.2	Construction du montage . . . . .	75
5.3	Conclusions sur la conception et construction du système expérimental	76
5.4	Méthodes expérimentales . . . . .	78
5.4.1	Précautions de mesure expérimentale . . . . .	78
5.4.2	Méthode de mesure de la vitesse réelle . . . . .	79
5.4.3	Positionnement du cylindre flexible . . . . .	80
5.4.4	Comportement de la force . . . . .	82
5.4.5	Lissage des mesures de force . . . . .	83
5.4.6	Procédure expérimentale . . . . .	84

5.4.7	Répétabilité des mesures . . . . .	86
CHAPITRE 6 RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX ET COMPARAISON .		88
6.1	Premiers résultats et comparaisons avec le modèle 2-D . . . . .	88
6.2	Modèle analytique/numérique 2.5-D . . . . .	90
6.2.1	Reconstruction numérique du moment . . . . .	90
6.2.1.1	Détermination du profil de vitesse $U_{sec,moy}^2(z)$ dans la section d'essai . . . . .	92
6.2.1.2	Distribution du coefficient de force $C(z)$ en fonction de $z$ . . . . .	93
6.2.1.3	Calcul des moments de portance et traînée . . . . .	96
6.2.2	Reconstruction numérique des dérivées de stabilité . . . . .	97
6.2.3	Calcul d'incertitude . . . . .	99
6.2.3.1	Calcul d'incertitude sur les moments induits . . . . .	100
6.2.3.2	Calcul d'incertitude sur les dérivées de stabilité . . . . .	101
6.3	Résultats expérimentaux et comparaisons avec le modèle 2.5-D . . . . .	104
6.3.1	Mesure de la vitesse expérimentale . . . . .	104
6.3.2	Mesures expérimentales des moments de portance et de traînée	105
6.4	Analyse des résultats sur les moments à la position $0\%D$ . . . . .	111
6.4.1	Valeurs numériques et expérimentales des moments induits . . . . .	111
6.4.2	Comparaison . . . . .	111
6.5	Analyse des résultats sur les taux de variation des moments par rapport au positionnement du cylindre . . . . .	114
6.5.1	Valeurs numériques et expérimentales des dérivées de stabilité	114
6.6	Analyse des résultats sur les sensibilités du moment par rapport à la vitesse d'entrée . . . . .	117
6.7	Conclusion sur l'expérimentation et les comparaisons . . . . .	118

CHAPITRE 7	POUR ALLER PLUS LOIN . . . . .	120
7.1	Équations pour l'écoulement et les sensibilités en régime instationnaire	120
7.1.1	Équations pour le fluide . . . . .	120
7.1.2	Équations de sensibilité . . . . .	121
7.2	Résultats à $R_e = 200$ . . . . .	121
CONCLUSION	. . . . .	124
RÉFÉRENCES	. . . . .	127
ANNEXES	. . . . .	132

## LISTE DES FIGURES

FIG. 1.1	Réponse vibratoire $y_{RMS}$ d'un faisceau de cylindre selon la vitesse du fluide. . . . .	5
FIG. 2.1	Graphe Posterr simple . . . . .	15
FIG. 2.2	Graphe Posterr simple . . . . .	15
FIG. 2.3	Configuration caractéristique . . . . .	16
FIG. 2.4	Apparent displacement . . . . .	17
FIG. 2.5	Schéma des déplacements apparents dus aux mouvements des cylindres . . . . .	20
FIG. 2.6	Schématisation pour la méthode des modes contraints . . .	28
FIG. 3.1	Écoulement dans une conduite obstruée par un cylindre . .	34
FIG. 3.2	Paramétrisation de la courbe mobile . . . . .	36
FIG. 3.3	Paramétrisation pour un cylindre en translation suivant $Y_C$ . .	38
FIG. 3.4	Maillage près d'une frontière . . . . .	46
FIG. 3.5	Système global à résoudre . . . . .	48
FIG. 3.6	Méthode de Newton . . . . .	49
FIG. 3.7	Schéma fonctionnel de la méthode adaptative . . . . .	51
FIG. 3.8	Projection locale sur un élément . . . . .	52
FIG. 4.1	Géométrie de la simulation numérique . . . . .	53
FIG. 4.2	Maillage final . . . . .	56
FIG. 4.3	Maillage autour du cylindre central . . . . .	56
FIG. 4.4	Erreur relative . . . . .	57
FIG. 4.5	Coefficients de forces et leurs sensibilités. . . . .	58
FIG. 4.6	Champ de vitesse longitudinal $u$ . . . . .	60
FIG. 4.7	Champ de pression $P$ . . . . .	60
FIG. 4.8	Champ de sensibilité $\frac{Du}{DY_C}$ . . . . .	61
FIG. 4.9	Champ de sensibilité $\frac{DP}{DY_C}$ . . . . .	62

FIG. 4.10	Champ de sensibilité $\frac{DP}{DX_C}$ . . . . .	62
FIG. 4.11	Iso-lignes $u$ dans le faisceau de cylindre . . . . .	65
FIG. 4.12	Sensibilité de la pression en fonction de mouvement trans- versal du cylindre central . . . . .	66
FIG. 4.13	Sensibilité de la pression en fonction de mouvement trans- versal du cylindre central . . . . .	67
FIG. 5.1	Interdépendance dans la conception du montage. . . . .	70
FIG. 5.2	Section d'essai et guidage linéaire. . . . .	71
FIG. 5.3	Jauges et montage sur le cylindre . . . . .	72
FIG. 5.4	Schéma hydraulique du montage expérimental. . . . .	74
FIG. 5.5	Vitesse analytique dans la section d'essai. . . . .	75
FIG. 5.6	Montage expérimental construit au sein du laboratoire. . . . .	77
FIG. 5.7	Étalon de mesure pour le système de guidage . . . . .	81
FIG. 5.8	Comportement de la force . . . . .	83
FIG. 5.9	Mesures expérimentales brutes. . . . .	83
FIG. 5.10	Mesure expérimentales lissées. . . . .	84
FIG. 5.11	Mesure de la vitesse et du moment. . . . .	85
FIG. 5.12	Répétabilité des moments . . . . .	87
FIG. 6.1	Profil de vitesse . . . . .	89
FIG. 6.2	Écoulement réel dans la section d'essai . . . . .	91
FIG. 6.3	Calculs de reconstruction numérique . . . . .	94
FIG. 6.4	$M_L(X)$ . . . . .	107
FIG. 6.5	$M_D(X)$ . . . . .	108
FIG. 6.6	$M_L(Y)$ . . . . .	109
FIG. 6.7	$M_D(Y)$ . . . . .	110
FIG. 6.8	Moments induits à la position 0% $D$ . - carré = valeur numérique,      rond = valeur expérimentale - . . . . .	112
FIG. 6.9	Support de guidage du cylindre central . . . . .	113



FIG. II.1	Comparaison des iso-lignes entre l'interpolation par série de Taylor et la nouvelle analyse . . . . .	136
FIG. II.2	Évolution de $C_D$ et $C_L$ pour un déplacement longitudinal X	137
FIG. II.3	Évolution de $C_D$ et $C_L$ pour un déplacement transversal Y .	137
FIG. II.4	Effet d'un déplacement simultané des cylindres 3 et 5. . . .	140
FIG. III.1	Schématisation des jauges de contrainte. . . . .	148
FIG. III.2	Force vs. Voltage pour le couple de jauges 1. . . . .	149
FIG. III.3	Schéma hydraulique du montage expérimental. . . . .	151
FIG. III.4	Vitesse analytique dans la section d'essai. . . . .	153
FIG. III.5	Réservoirs de glycérine . . . . .	154
FIG. III.6	Section d'essai et guidage linéaire. . . . .	154
FIG. III.7	Valves de régulation et ON/OFF. . . . .	154
FIG. III.8	Tuyauteries . . . . .	155
FIG. III.9	Événements. . . . .	155
FIG. III.10	Image Noir et Blanc du réservoir et vecteur colonne. . . .	156
FIG. III.11	Vecteur colonne étudié. . . . .	157
FIG. III.12	Évolution de la ligne air/glycérine . . . . .	157
FIG. III.13	Déplacement du point d'inflexion et regression . . . . .	158
FIG. III.14	Mesure du rapport pixel/distance photo de l'image. . . .	158

## LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES

CFD	Computational Fluid Dynamics
IFS	Interaction Fluide-Structure
MEF	Méthode des Eléments Finis
MES	Méthode de l'Equation des Sensibilités
DSE	Discrete Sensitivity Equation
CSE	Continuous Sensitivity Equation

### Caractères usuels

$M_s$	matrice de masse structurelle des cylindres
$M_f$	matrice de masse hydrodynamique
$C_s$	matrice d'amortissement structurel des cylindres
$C_f$	matrice d'amortissement généré par le fluide
$K_s$	matrice de rigidité structurelle
$K_f$	matrice de rigidité due au fluide
$X$	vecteur position des cylindres
$U$	vitesse de l'écoulement
$f$	fréquence naturelle du cylindre
$D$	diamètre du cylindre
$\zeta$	coefficient d'amortissement
$m$	masse linéique des cylindres
$\mathbf{u} = (u, v)$	vecteur vitesse
$s_a$ ou $s_\Phi^a$	sensibilité de la variable scalaire $\Phi$ par rapport à $a$
$a$	paramètre de design
$P$	Pas intercylindrique
$m_T$	masse totale du système

$m_S$	masse structurelle
$m_H$	masse hydrodynamique
$\mathbf{F}$	vecteur des forces induites
$\rho$	densité de fluide
$U_R$	vitesse relative
$l$ ou $L_C$	longueur de cylindre
$F_x$	variable scalaire de la force suivant $x$
$F_y$	variable scalaire de la force suivant $y$
$C_D$	coefficient de trainée
$C_L$	coefficient de portance
$\bar{C}_D$	coefficient de trainée basé sur la vitesse locale
$\bar{C}_L$	coefficient de portance basé sur la vitesse locale
$U_G$	vitesse interstitielle
$U_\infty$	vitesse à l'infini
$(x, y)$	coordonnées cartésiennes
$(\xi, \eta)$	coordonnées dans le repère local
$T, L, S$	distances intercylindriques
$\tau, \delta t$	temps de latence
$\lambda$	valeur propre
$\varphi$	différence de phase
$\sigma$	tenseur des contraintes
$\sigma'$	sensibilité du tenseur des contraintes
$\tau$	tenseur des contraintes visqueuses
$\mu$	viscosité
$p$	pression
$\Gamma_D$	frontière pour les conditions de Dirichlet

$\Gamma_N$	frontière pour les conditions de Neumann
$\Gamma_a$	frontière dépendante du paramètre de design $a$
$L$	largeur de conduite
$\hat{n}$	vecteur normal
$\hat{t}$	vecteur tangent
$s_a^\phi$	sensibilité de la variable vectoriel $\phi$ par rapport à $a$
$(X_i, Y_i)$	coordonnées du centre du cylindre
$J$	matrice jacobienne de $\hat{X}$
$\delta p, \delta \mathbf{u}, \delta s_p, \delta s_u$	fonctions tests pour la méthode de Galerkin
$u^h$	solution élément fini de la vitesse $u$
$s_u^h$	solution élément fini de la sensibilité de vitesse $u$
$n_u$	nombre de noeuds utilisés pour le calcul de $u^h$
$n_{s_u}$	nombre de noeuds utilisés pour le calcul de $s_u^h$
$N_i^u$	fonction d'interpolation pour le calcul de $u^h$
$N_i^{s_u}$	fonction d'interpolation pour le calcul de $s_u^h$
$e$	erreur numérique
$h$	taille de l'élément de maille
$Re$	nombre de Reynolds
$Re_{loc}$	nombre de Reynolds local
$V_{exp}$	vitesse expérimentale en entrée de section
$M$	moment
$V_0$	vitesse de référence du profil 3D de vitesse
$I_{tot}$	incertitude

### Lettres grecques

$\alpha$	angle d'incidence
----------	-------------------

$\beta_n$  terme

## Indices et exposants

$*$	associé à une valeur cible
$\infty$	associé à une valeur à l'infini (de référence)
$'$	sensibilité (dérivée)
$s$	associé au fluide
$f$	associé au fluide
$h$	solution éléments finis
$i$	composante d'un vecteur, valeur nodale, valeur inférieure
$\ n$	itération $n$
$\ n + 1$	itération $n + 1$
$exp$	relatif à une valeur expérimentale
$num$	relatif à une valeur numérique

## Symboles

$\nabla$	opérateur gradient
$\nabla \cdot$	opérateur divergence
$\frac{\partial \cdot}{\partial \cdot}$	dérivée partielle (ou eulérienne)
$\frac{D \cdot}{D \cdot}$	dérivée totale (ou lagrangienne)
$\  \cdot \ $	norme

## LISTE DES TABLEAUX

TAB. 4.1	Forces et dérivées de stabilité des différents cylindres de la configuration en fonction des déplacement $Y_C$ et $X_C$ du cylindre central . . . . .	64
TAB. 5.1	Positions réelles du cylindre central . . . . .	82
TAB. 6.1	Coefficient de traînée $C_D$ pour différentes vitesses d'entrée. .	97
TAB. 6.2	Coefficient de traînée $C_D$ pour différentes vitesses d'entrée. .	98
TAB. 6.3	Moment en portance et traînée et leurs dérivées suivant $X_C$ et $Y_C$ . . . . .	98
TAB. 6.4	Incertitudes sur les mesures expérimentales par rapport aux valeurs nominales. . . . .	101
TAB. 6.5	Incertitudes sur les séries de mesure . . . . .	103
TAB. 6.6	Mesures répétées de vitesse (déplacement $X$ ) . . . . .	105
TAB. 6.7	Mesure répétées de vitesse (déplacement $Y$ ) . . . . .	105
TAB. 6.8	Valeurs expérimentales des moments mesurés pour un déplacement du cylindre central dans la direction $X$ . . . .	106
TAB. 6.9	Valeurs expérimentales des moments mesurés pour un déplacement du cylindre central dans la direction $Y$ . . . .	106
TAB. 6.10	Incertitudes sur les mesures expérimentales par rapport aux valeurs nominales . . . . .	111
TAB. 6.11	Incertitudes sur les mesures expérimentales par rapport aux valeurs nominales . . . . .	117
TAB. 6.12	Sensibilités expérimentales des moments induits par rapport à la vitesse $U$ . . . . .	118
TAB. II.1	Erreur relative sur $C_D$ pour un déplacement suivant $X$ . . .	138
TAB. II.2	Erreur relative sur $C_L$ pour un déplacement suivant $Y$ . . .	138

TAB. II.3	Forces et dérivées de stabilité lorsque 3 est flexible et lorsque 3 et 5 sont flexibles. . . . .	142
TAB. II.4	Forces et dérivées calculées par interpolation . . . . .	142
TAB. II.5	Forces et dérivées calculées par nouvelle analyse . . . . .	143
TAB. II.6	Coefficients de forces et sensibilités par rapport aux déplacements du cylindre central $C$ . . . . .	143
TAB. II.7	Coefficients de forces et sensibilités par rapport aux déplacements du cylindre de gauche numéro 1 . . . . .	144
TAB. II.8	Coefficients de forces et sensibilités par rapport aux déplacements du cylindre 2 . . . . .	144
TAB. II.9	Coefficients de forces et sensibilités par rapport aux déplacements du cylindre 3 . . . . .	144
TAB. II.10	Coefficients de forces et sensibilités par rapport aux déplacements du cylindre 4 . . . . .	145
TAB. V.1	Évolution des sensibilités adimensionnelles de paramètres suivant le nombre de Reynolds local pour la position $0\%D$ .	176
TAB. V.2	Sensibilités normalisées pour la traînée et la portance . . . .	177
TAB. V.3	Sensibilités normalisées pour la traînée et la portance . . . .	177
TAB. V.4	Incertitudes sur les mesures expérimentales par rapport aux valeurs nominales . . . . .	179
TAB. V.5	Sensibilités de paramètres pour un nombre de Reynolds local de 32 pour la position $4\%DX$ . . . . .	181
TAB. V.6	Évolution des sensibilités adimensionnelles pour la traînée et la portance suivant $Re_{loc}$ . . . . .	182
TAB. V.7	Incertitudes sur les séries de mesure . . . . .	182
TAB. V.8	Incertitudes sur les séries de mesure . . . . .	183

## LISTE DES ANNEXES

ANNEXE I	COEFFICIENTS DES MATRICES ET . . . . .	132
I.1	Coefficients de la matrice d'amortissement du fluide $\bar{\mathbf{C}}_f$ . . . . .	132
I.2	Coefficients de la matrice de rigidité du fluide $\bar{\mathbf{K}}_f$ . . . . .	132
ANNEXE II	ÉVALUATION RAPIDE D'ÉTATS VOISINS . . . . .	134
II.1	Méthode d'interpolation pour la détermination des états voisins . . .	134
II.1.1	Application à l'écoulement autour d'un faisceau de tubes flexibles . . . . .	139
ANNEXE III	CONCEPTION . . . . .	146
III.1	Calcul de résistance des matériaux pour les parois de la section d'essai	146
III.2	Système de jauge et calibration . . . . .	148
III.2.1	Calibration de la force . . . . .	149
III.2.2	Calibration du moment . . . . .	150
III.3	Calcul de la vitesse d'écoulement . . . . .	150
III.4	Montage . . . . .	154
III.5	Mesure de la vitesse réelle . . . . .	156
ANNEXE IV	CALCUL DE RECONSTRUCTION 3D DE LA SOLUTION NUMÉRIQUE . . . . .	160
IV.1	Détermination du profil de vitesse dans une section carrée . . . . .	160
IV.1.1	Détermination de la vitesse de référence $V_0$ . . . . .	166
IV.1.2	Détermination du profil de vitesse expérimentale moyenne . . .	168
IV.2	Distribution du coefficient de force en fonction de $z$ . . . . .	169
IV.2.1	Détermination de la vitesse de référence pour le profil numé- riques . . . . .	169



ANNEXE V	RÉSULTATS POUR LE CALCUL D'INCERTITUDE . .	171
V.1	Calcul d'incertitude sur les moments induits . . . . .	172
V.2	Calcul d'incertitude sur les dérivées de stabilité . . . . .	179

## INTRODUCTION

La vie de tous les jours regorge d'exemples d'interaction fluide-structure, un aspirateur, une hélice de bateau, un indicateur de vent sur le bord de la route ou encore une pompe pour envoyer l'eau courante au vingtième étage d'un immeuble. Autant d'exemple de systèmes qui prouvent que ce phénomène nous est utile dans bien des cas. Il est malheureusement aussi responsable de bon nombres de problèmes apparaissant dans ces mêmes systèmes ou autres. Il devient alors un défi à surmonter, essentiellement dans le cas d'installations industrielles à grande échelle, que ce soit pour les plate-formes pétrolières avec leurs cables d'amarrage, les grandes cheminées d'usine ou encore les faisceaux de tubes rencontrés dans les générateurs de vapeurs nucléaires. Ce dernier exemple est un grand problème dans le secteur nucléaire, l'usure des tubes générée par l'interaction fluide-structure nécessite un entretien important des machines et entraîne alors des pertes d'argent telle que le gouvernement et les industriels concernés n'hésitent pas à investir dans la recherche pour trouver une solution à ce gâchis.

C'est dans ce contexte-ci qu'a commencé, il y a maintenant plus de 25 années, l'étude d'interaction fluide-structure dans les faisceaux de cylindre afin de pallier à ces problèmes industriels majeurs. Plusieurs phénomènes d'interaction fluide-structure rentrent en jeu en ce qui concerne l'usure des générateurs de vapeur, mais les laboratoires de recherche sont unanimes pour dire que le phénomène d'instabilité fluide-élastique est le plus dangereux. Ce phénomène s'établit lorsque les tubes, qui absorbent l'énergie apportée par le fluide, voient leurs amplitudes croître sans limite, pouvant ainsi entraîner une rupture au niveau des supports des tubes. Afin de mieux comprendre ce phénomène, il faut donc étudier, entre autres, les vibrations induites par des écoulements transverses dans un faisceau de tube.

De nombreuses théories en instabilité fluide-structure sont apparues, certaines pas assez proches des écoulements réels étudiés, d'autre très efficaces mais demandant beaucoup de données d'entrée et enfin d'autres théories efficientes, c'est-à-dire qui donnent des résultats acceptables par rapport aux moyens nécessaires pour les obtenir. Dans un contexte industriel où le temps et l'argent sont des facteurs prédominants, ce sont donc vers ces théories efficientes le laboratoire d'Interaction Fluide-Structure de l'École Polytechnique de Montréal s'est tourné. Les principales données nécessaires pour ces théories sont les facteurs influents du faisceau de tubes, appelées les dérivées de stabilité, et caractérisent le taux de variation des coefficients de forces subit par les cylindres par rapport aux déplacement de ces cylindres. Ces données sont, pour l'instant, déterminées par des méthodes expérimentales, nécessitant alors des montages lourds et très onéreux. À l'ère du numérique dans laquelle nous vivons, il peut donc sembler intéressant de voir si les méthodes numériques peuvent venir en aide aux laboratoires et alléger ainsi en temps et argent leurs recherches. La méthode des équations de sensibilité pourraient être une de ces méthodes numériques.

D'abord utilisée dans le domaine des structures, la méthode des équations de sensibilité est devenue, il y a maintenant presque 25 ans, une méthode efficace et efficiente pour la caractérisation des variations des paramètres d'écoulements. Utilisée alors dans le domaine de la mécanique des fluide assistée par ordinateur, ou CFD (*Computational Fluid Dynamics*), cette méthode a permis l'étude de nombreux cas traitant des perturbations d'un système. Les équations de sensibilité calcule les dérivées des variables d'écoulement par rapport à un paramètre de perturbation considéré. Il est alors possible d'en déduire les variations des coefficients de force selon ce même paramètre de perturbation. Cette méthode s'avère donc avoir un potentiel intéressant dans la détermination des dérivées de stabilité d'un faisceau de cylindre.

Le but de ce projet de maîtrise consiste donc à étudier le potentiel de la méthode des équations de sensibilité dans les déterminations des dérivées de stabilité d'un faisceau de cylindres. Afin de commencer par le commencement, nous allons donc chercher à valider cette méthode dans le cas d'un écoulement laminaire à bas régime. Nous utilisons pour cela le code numérique CADYF développé par Monsieur Dominique Pelletier et la Chaire de recherche du Canada en analyse, caractérisation et optimisation d'écoulements complexes.

Ce mémoire comporte 7 chapitres. Nous verrons au chapitre 1 une revue bibliographique des deux domaines de recherche concernés afin de placer dans le contexte actuel des recherches le travail présenté ici. Ceci nous permettant finalement de fixer les buts et les objectifs de ce projet de maîtrise. Le chapitre 2 présente un résumé exhaustif de la théorie d'instabilité fluide-élastique considérée. Vient ensuite, au chapitre 3, la présentation de la méthode des équations de sensibilité ainsi que les méthodes numérique de résolution de ces équations. Le chapitre 4 présentera les simulations numériques effectuées ainsi que leurs résultats. Vient ensuite la partie expérimentale, utile pour la validation du code, qui se compose en deux chapitres : le chapitre 5, qui présente la conception du montage expérimental ainsi que les différentes méthodes de mesure, puis le chapitre 6, qui présente les résultats expérimentaux et la comparaison avec les résultats numériques analogues. Finalement, nous présenteront en chapitre 7 quels sont les futures recherches possible qui pourrait permettre de valider le code numérique dans le cas d'écoulement à régime plus haut.

## CHAPITRE 1

### REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

Ce premier chapitre présente un bref résumé des recherches accomplies dans les différents domaines abordés dans ce mémoire. Cette revue bibliographie nous permet de positionner notre travail dans le contexte de la recherche actuelle. Premièrement, nous passerons en revue les différents phénomènes induisant des vibrations dans des faisceaux de tubes. Nous présenterons ensuite le phénomène responsable pour la majorité de l'instabilité dans un faisceau : l'instabilité fluide-élastique. Nous passerons ensuite en revue les différentes théories créées pour modéliser ce phénomène. Cela nous amènera alors à faire le lien avec la Méthode des Équations de Sensibilité (MES) et à présenter brièvement cette dernière.

#### 1.1 Phénomènes induisant des vibrations

Lorsqu'un écoulement traverse un faisceau de cylindres, il crée des forces qui induisent des vibrations. Selon la configuration du faisceau et les différentes conditions d'opérations, quatre sources de vibrations ont été identifiées comme les plus prépondérantes <sup>[23, 24]</sup> : Il y a premièrement les vibrations dues à la turbulence de l'écoulement ("*Random excitation due to turbulent flow* "). Si l'on augmente la vitesse d'écoulement, l'excitation due à la turbulence rentre alors en résonance avec la période de vibration des cylindres, (on parle de "*coup de bélier*" ou "*turbulent buffeting*"). Finalement, nous avons l'instabilité fluide-élastique ("*fluidelastic instability*"). Les mouvements des tubes engendrent une modification de l'écoulement et donc des changements des forces induites. Ce changement agit en rétro-action sur

ces cylindres induisant ainsi un comportement instable.

La figure 1.1 présente les zones de prépondérance, selon la vitesse du fluide, des différents phénomènes de vibration.

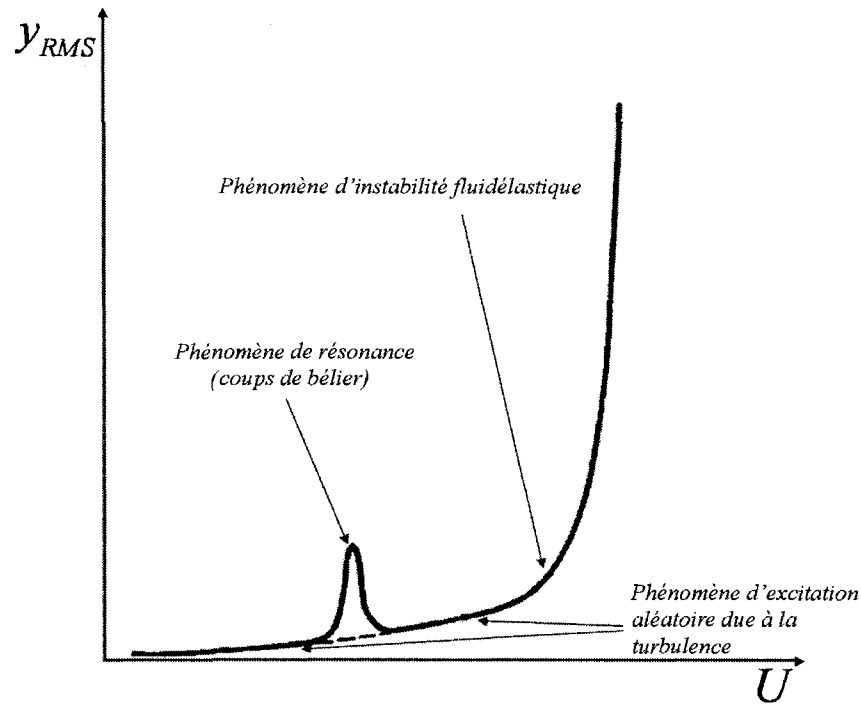


FIG. 1.1 Réponse vibratoire  $y_{RMS}$  d'un faisceau de cylindre selon la vitesse du fluide.

Il est largement reconnu <sup>[24]</sup> que pour le cas d'un écoulement transversal dans un faisceau de tube, l'instabilité fluide-élastique est la cause majeure des vibrations de la structure.

## 1.2 Instabilité fluide-élastique

L'instabilité fluide-élastique apparaît lorsque l'énergie du fluide absorbée par le cylindre est supérieure à l'énergie dissipée par l'amortissement du cylindre. Comme nous pouvons le remarquer sur la figure 1.1, une fois l'instabilité atteinte l'aug-

mentation de la vitesse de l'écoulement entraîne une augmentation rapide de la vibration des tubes, pouvant amener à la destruction du système.

Le comportement du faisceau de cylindre se modélise par l'équation de mouvement homogène suivante :

$$[M_s + M_f]\{\ddot{X}\} + [C_s + C_f]\{\dot{X}\} + [K_s + K_f]\{X\} = 0 \quad (1.1)$$

Où  $M_s$  représente la masse structurel des cylindres et  $M_f$  la masse hydrodynamique ajoutée par la présence du fluide,  $C_s$  représente l'amortissement généré par la structure et  $C_f$  celui généré par le fluide, et enfin  $K_s$  représente la rigidité de la structure et  $K_f$  la rigidité additionnelle due à la présence du fluide.  $X$  représentant le vecteur de coordonnées des différents cylindres.

On caractérise l'instabilité en regardant la vitesse réduite critique d'écoulement  $U/fD$ , où  $U$  est la vitesse d'écoulement,  $f$  et  $D$  respectivement la fréquence naturelle et le diamètre du cylindre, en fonction du paramètre d'amortissement (*mass-damping parameter*)  $2\pi\zeta m/\rho D^2$ , où  $\zeta$  est le coefficient d'amortissement et  $m$  la masse linéique du cylindre. Cette instabilité dynamique peut être divisée en deux catégories [6, 24] :

**(a) Instabilité contrôlée par l'amortissement du fluide.** (ou "*Fluid-Damping-Controlled Instability* "). Lorsque la vitesse du l'écoulement dépasse une certaine valeur critique et qu'il subsiste une différence de phase de  $\pi/2$  entre le déplacement du cylindre et la force fluide générée par ce déplacement, le terme d'amortissement du fluide dans les équations de mouvement devient négatif et se transforme alors en une nouvelle force d'excitation rendant le système instable. On dit alors que l'amortissement du fluide contrôle l'instabilité. L'énergie du fluide absorbée par les cylindres dépend alors de la vitesse des cylindres. On appelle aussi ce phénomène un "mécanisme de vitesse" ("Velocity Mechanism

” ). Le couplage entre cylindres n’est pas nécessaire pour que cette instabilité apparaisse, c’est un mécanisme à un degré de liberté.

**(b) Instabilité contrôlée par la rigidité fluide-élastique.** (ou “ *Fluidelastic-Stiffness-Controlled Instability*”). Cette instabilité dynamique est causée par les forces nées du déplacement du cylindre. On parle aussi d’un “ mécanisme de déplacement ” ( “ Displacement Mechanism ” ). Contrairement au mécanisme de vitesse, le mécanisme de déplacement nécessite un système avec au moins deux degrés de liberté pour qu’il apparaisse. La matrice de rigidité du fluide est alors non-symétrique rendant le système non-conservatif. On dit alors que la rigidité du fluide contrôle l’instabilité.

### 1.2.1 Les modèles théoriques

De nombreux modèles théoriques ont été développés durant ces 25 dernières années afin d’analyser l’instabilité fluide-élastique de faisceau de cylindres sujets à un écoulement transversal. Cette section présente les modèles les plus importants. Le lecteur intéressé pourra cependant consulter Chen <sup>[8]</sup> et de Price <sup>[24]</sup> pour obtenir plus amples informations.

#### Le modèle *Jet Switching* :

Créé par Roberts <sup>[32, 33]</sup>, il s’agit du premier modèle semi-analytique pour les écoulements transverse dans un faisceau de tubes. Pour Roberts, le phénomène instationnaire de *jet switching*, où le jet à la sortie du faisceau change de direction dans le temps, est à l’origine de l’instabilité. Ce changement de direction crée une chute de pression dans le jet et est donc responsable du mouvement du cylindre.

Ce modèle a posé les hypothèses fondamentales de la théorie en instabilité fluide-



élastique qui sont toujours considérées (temps de latence, comportement hystérétique du coefficient de pression, équations de la dynamique).

### **Le modèle écoulement potentiel :**

Le modèle d'écoulement potentiel (ou écoulement non-visqueux) postule que les zones de recirculation dues au décrochement du fluide après les cylindres sont petites et donc négligeables.

Les premiers à avoir tenter de trouver les forces fluide avec cette méthode furent Dalton et Helfinstine <sup>[10]</sup> qui ont considérés un groupe de cylindres oscillant dans un fluide stagnant et dans un fluide en écoulement uniforme. Les résultats ne furent pas très concluant : méthode lourde pour plusieurs cylindres, singularités dans le calcul lorsque les cylindres sont trop proches. Cette méthode a cependant été utilisée et modifiée par d'autre chercheurs ( Chen <sup>[5]</sup>, Balsa <sup>[1]</sup>, Païdoussis *et al.* <sup>[22]</sup>) et la conclusion fût que même si la théorie était trop pauvre et que les zones interstitielles sont bien plus importantes que prévu, elle demeurerait tout de même un bon outil pour trouver la masse hydrodynamique du faisceau de cylindre considéré. Ce modèle ne peut cependant prédire l'instabilité car on suppose que le système est conservatif.

### **Le modèle écoulement quasi-statique :**

Sûrement parmi le plus connu des modèles, il présume que, à un temps  $t$  donné, les caractéristiques dynamiques de l'écoulement dans le faisceau de cylindres oscillants sont les mêmes que celles d'un écoulement dans un faisceau de cylindres statiques dont les positions sont celles au temps  $t$ . Par conséquent, les forces dépendent uniquement de la position des cylindres. Elles sont évaluées expérimentalement.

Cette méthode est originellement développée par Connors <sup>[9]</sup> qui en déduit l'équation de Connors, équation très utilisée dans le design de systèmes diphasiques. Découvrant que le phénomène de *jet-switching* n'apparaît pas pour des faibles vitesses, Connors en déduit qu'il ne s'agissait alors pas du phénomène principalement responsable de l'instabilité. Ce modèle fût modifiée par Blevins <sup>[2]</sup> puis par Whiston & Thomas <sup>[42]</sup> qui, en utilisant un angle de phase entre le mouvement des différents cylindres, généralisèrent l'analyse à un nombre de cylindres quelconque. Les résultats obtenus concordaient avec certains expériences mais pas d'autres. Le défaut de ce modèle est que les effet dynamiques du fluide ne sont pas assez pris en considération, ce qui amena les chercheurs à s'intéresser à un modèle quasi-stationnaire.

#### **Le modèle écoulement quasi-stationnaire :**

Le modèle quasi-stationnaire établit que, à un temps  $t$  donné, les caractéristiques dynamiques de l'écoulement dans le faisceau de cylindres oscillants sont les mêmes que celles pour un écoulement dans un faisceau de cylindres se déplaçant à vitesse constante égale à la valeur instantanée au temps  $t$ . Dans ce type de modèle, les forces induites doivent être mesurées en laboratoire. Ce modèle fait l'hypothèse que les coefficients de portance et de trainée sur les cylindres oscillants sont les mêmes que sur des cylindres statiques. D'après Blevins <sup>[3]</sup>, cette hypothèse reste valide tant que la vitesse du cylindre est dix fois moindre que celle du fluide, soit une vitesse réduite de 10.

Les travaux de Price et Païdoussis <sup>[26, 27, 25, 28, 29, 30]</sup> sont les plus conséquents pour ce modèle. Afin de contourner ce problème de limitation de vitesse réduite et de modéliser de façon plus fidèle le phénomène, ils prirent en compte le phénomène instationnaire de temps de latence entre les déplacements des cylindres et leur effet sur les forces. Cette théorie nécessite cependant des données expérimentales pour faire l'analyse, il s'agit des dérivées de stabilité (les dérivées des coefficients de

forces en fonction du déplacement des cylindres) et des temps de latence défini pour prendre en compte les phénomènes dynamiques.

### **Le modèle écoulement instationnaire :**

Le modèle instationnaire se base sur la mesure directe des forces instationnaires sur les cylindres oscillants.

Il a essentiellement été développé grâce aux recherches de Chen <sup>[7, 8]</sup> et Tanaka et al <sup>[35, 36, 37]</sup>. Ce modèle donne des résultats qui concordent presque parfaitement avec les expériences. Cependant, il subsiste un gros désavantage : un grand nombre de données expérimentales sont nécessaires pour l'analyse des coefficients de forces instationnaires. En conclusion, ce modèle a apporté de nombreuses informations et nouvelles découvertes sur l'instabilité fluidélastique dans les faisceaux de cylindre.

#### **1.2.2 Comparaison des modèles**

Nous avons présenté les plus importants modèles d'instabilité fluide-élastique. Le développement des modèles tels que celui de *Jet-switching*, en écoulement potentiel ou quasi-statique ont grandement contribué à la compréhension des notions fondamentales en instabilité fluide-élastique. Cependant, leur manque de fidélité dans la modélisation des phénomènes dynamiques ne leur permet pas de produire des prédictions cohérentes avec la réalité.

De l'autre côté, le modèle à écoulement instationnaire est un excellent modèle prenant en compte tous les phénomènes dynamiques mis en jeu, les résultats obtenus calquant très bien la réalité. Malheureusement, il nécessite beaucoup de valeurs expérimentales rendant la méthode lourde et donc pas toujours appropriée pour le design.

Le meilleurs compromis semble donc la méthode quasi-stationnaire développée par Price et Païdoussis, malgré que ses prédictions légèrement inférieure à celle de la méthode instationnaire. Elle donne quand même une bonne idée de ce qu'il se passe et cela avec seulement comme valeurs expérimentales nécessaires les dérivées des coefficients de portance et de trainée en fonction du déplacement des cylindres, et le temps de latence.

### 1.3 Pourquoi la Méthode des Équations de Sensibilités ?

Le modèle quasi-stationnaire de Price et Païdoussis nécessite des données expérimentales : les dérivées de stabilité. Ces valeurs sont difficiles à obtenir, rendant les expériences, nécessaires à leur mesure, coûteuses, délicates et empreintes d'incertitudes : incertitude sur la valeur du débit de fluide, la position des cylindres du faisceau, les systèmes électroniques de mesure, du nombre de Reynolds étudié, ... Même s'il est important de comprendre que les études expérimentales d'écoulement dans les faisceau de cylindres sont indispensables à une bonne compréhension du phénomène, il peut être cependant intéressant de voir jusqu'à quelle limite. L'acquisition de ces dérivées de stabilité en utilisant un outil informatique pourrait être de bon augure, permettant ainsi d'alléger les lourdes mesures expérimentales et obtenant ainsi un gain de temps et d'argent non-négligeable. La Méthode des Équations de Sensibilités pourrait être cet outil informatique.

### 1.4 Méthode des Équations de Sensibilités

La mécanique des fluides assistée par ordinateur ou CFD ( *Computational Fluid Mechanics* ) est apparue il y a maintenant plus de 70 ans. Le secteur industriel de l'aéronautique en est son plus grand client, toujours poussé par le besoin d'obtenir

des résultats fiables à des coûts modérés. Le premier but de la CFD fût l'analyse d'écoulement (comportement du fluide sur une aile, un cylindre, etc...). Mais très vite, on a perçu l'intérêt de la CFD comme vecteur d'optimisation pour le design : trouver le profil qui optimise la traînée par exemple.

Les algorithmes d'optimisation les plus puissants nécessitent la connaissance du gradient de la fonction coût. C'est dans ce contexte que sont apparues différentes méthodes de calcul de gradient dont les trois principales sont les différences finies, la méthode des variables adjointes et la méthode des sensibilités. En s'appuyant sur les travaux de Turgeon [39], il a été conclu que la Méthode des Équations de Sensibilités (MES) présentait le plus d'avantages pour notre cas.

D'abord très utilisée dans le domaine de la mécanique des solides et plus précisément en structure [17], cette méthode est apparue ensuite en mécanique des fluides dans les années 70. Dans le cadre d'étude d'écoulement, les équations de sensibilité se trouvent en dérivant les équations de Navier-Stokes, comme nous le verrons plus tard. Les nouvelles inconnues à trouver sont appelées les sensibilités et sont les dérivées des variables d'écoulement  $(u, v, \rho)$  par rapport aux paramètres d'intérêt. On définit donc la sensibilité d'une fonction  $\Phi$  par rapport à un paramètre  $a$  comme le taux de variation de  $\Phi$  lorsque l'on perturbe  $a$  :

$$s_{\Phi}^a = \frac{\partial \Phi}{\partial a} \quad (1.2)$$

Ainsi les sensibilités des variables d'écoulement par rapport aux déplacements des cylindres nous permettront d'obtenir les dérivées des coefficients de force par rapport aux déplacements des cylindres, soit les dérivées de stabilité recherchées.

Le code numérique utilisé a été développé à l'École Polytechnique de Montréal par Monsieur Dominique Pelletier et la Chaire de recherche en caractérisation et optimisation d'écoulement complexe. Cela fait maintenant près de 25 ans que le code est amélioré, rendant cet outil puissant et très précis.

Cette méthode est donc très utile et peut être une alternative aux essais expérimentaux. Nous verrons de plus tout au long de ce mémoire qu'elle est aussi très utile dans d'autres domaines d'application :

- Calcul rapide de solutions voisines <sup>[18]</sup>, qui permet d'obtenir les écoulements au travers de géométries de formes voisines de la géométrie originalement étudiée.
- L'analyse d'incertitude <sup>[40]</sup>, qui permet de quantifier les intervalles d'incertitude qui apparaissent lors de mesures expérimentales.
- La détermination de paramètres influents <sup>[15]</sup> qui caractérise les paramètres responsables pour la majorité de la perturbation du système étudié.

## 1.5 Objectifs de la maîtrise

Le but de ce travail est donc d'évaluer l'utilité de la Méthode des Équations de Sensibilités dans la recherche de dérivées de stabilité pour obtenir les domaines d'instabilité fluide-élastique de faisceaux de cylindres sujets à des écoulement transverses. Pour atteindre ce but, nous allons passer par plusieurs jalonnements :

- Utiliser le code numérique de la Chaire de recherche en optimisation calculant les équations de sensibilités afin de sortir les valeurs des dérivées de stabilité.
- Concevoir et implémenter une boucle expérimentale visant à valider les résultats obtenus par simulation numérique.
- Procéder aux mesures expérimentales en recréant les mêmes conditions d'écoulement que celles de la simulation numérique.
- Comparer les résultats expérimentaux avec ceux numériques et en tirer les conclusions adéquates pour s'ouvrir vers de possibles futures recherches.

## CHAPITRE 2

### MODÉLISATION ANALYTIQUE DU PHÉNOMÈNE D'INSTABILITÉ FLUIDÉLASTIQUE

Comme nous l'avons vu, de nombreuses théories analytiques pour la prédiction d'instabilité fluide-élastique ont été proposées durant ces vingt-cinq dernières années. Certaines demandent beaucoup de données expérimentales, d'autres moins. Parmi ces théories, celles quasi-stationnaires créées par Price et Païdoussis [25, 26, 27, 28, 29, 30] ne demandent que les dérivées de stabilité et le temps de latence. Le but de ce chapitre est de donner une vision générale de leur modèle afin d'avoir une idée du fonctionnement de ce phénomène et de mettre en avant le lien avec les équations de sensibilités.

#### 2.1 Configuration de faisceau

Plusieurs configurations de tubes existent dans les différents systèmes mécaniques où apparaissent le phénomène d'instabilité fluidélastique. Nous avons les configurations dites " carrés " ( voir Fig. 2.1) et les configurations dites "triangle" (voir Fig. 2.2).

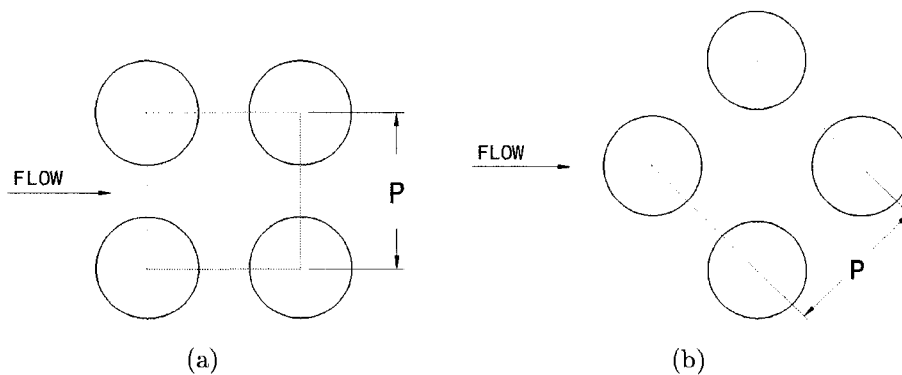


FIG. 2.1 (a) Carré normal ( $90^\circ$ ) (b) Carré tourné ( $45^\circ$ ).

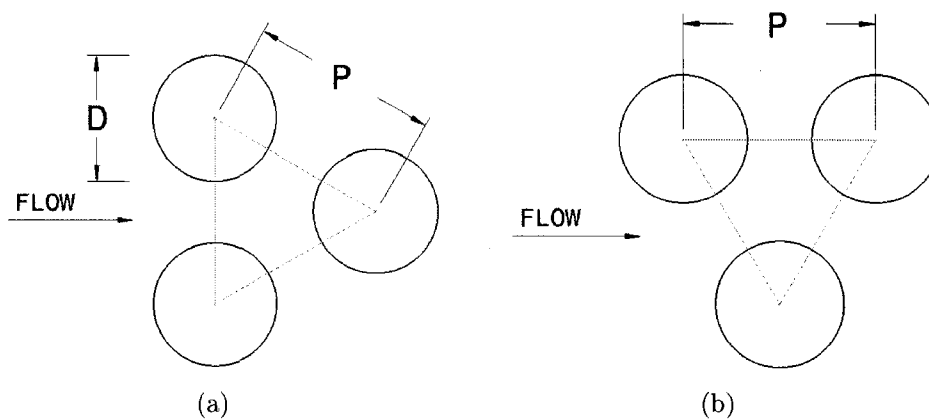


FIG. 2.2 (a) Triangle normal ( $30^\circ$ ) (b) Triangle tourné ( $60^\circ$ ).

Avec  $D$  le diamètre des cylindres et  $P$  le pas entre les cylindres.

## 2.2 Équations de mouvement

Nous présentons ici un résumé de la théorie quasi-stationnaire de Price et Païdousis. Pour une configuration de  $N$  cylindres disposés en triangle tourné  $60^\circ$ , l'équation de mouvement des cylindres sujets à un écoulement transversal se modélise de la façon suivante :

$$[M]\ddot{X} + [C_s]\dot{X} + [K_s]X = F \quad (2.1)$$



Où  $\mathbf{X} = (x_1, y_1, \dots, x_N, y_N)^T$  est le vecteur déplacement des cylindres,

$[\mathbf{M}] = m_T[\mathbf{I}]$  la matrice de la masse structurale et hydrodynamique,

$[\mathbf{C}_s]$  la matrice d'amortissement de la structure,

$[\mathbf{K}_s]$  la matrice de la rigidité de la structure et

$\mathbf{F} = (F_{x1}, F_{y1}, \dots, F_{xN}, F_{yN})^T$  le vecteur des forces induites par le fluide.

La masse  $m_T$  est composée de deux termes, la masse structurale  $m_s$  et la masse hydrodynamique  $m_H$ .

### 2.3 Configuration caractéristique

Un réel faisceau de cylindres disposé dans les générateurs de vapeurs comporte plusieurs milliers de tubes. Afin de rendre cette analyse possible, nous prenons donc une configuration caractéristique montrée en Fig.2.3.

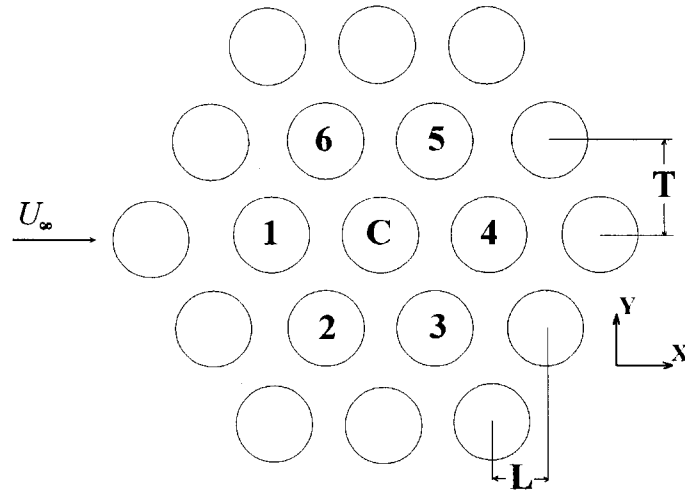


FIG. 2.3 Configuration caractéristique

L'analyse qui suit se fait sur le comportement du cylindre  $C$ , en prenant en considération ses cylindres avoisinants 1,2,3,4,5 et 6.

## 2.4 Forces induites

Les forces induites par le fluide sur un cylindre du faisceau dépendent de son mouvement et celui de ses voisins. L'approche quasi-stationnaire donne que le mouvement du cylindre ne modifie que la vitesse relative  $U_R$ . (voir Fig. 2.4)

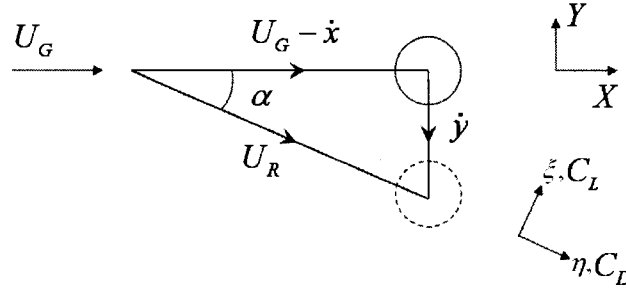


FIG. 2.4 Apparent displacement

Le changement d'angle d'attaque entraîne un changement de direction des forces de portance et de traînée qui ont alors la forme suivante :

$$F_x = \frac{1}{2} \rho U_R^2 l D [\bar{C}_D \cos(\alpha) + \bar{C}_L \sin(\alpha)] \quad (2.2)$$

$$F_y = \frac{1}{2} \rho U_R^2 l D [\bar{C}_L \cos(\alpha) - \bar{C}_D \sin(\alpha)] \quad (2.3)$$

Où  $\bar{C}_D$  et  $\bar{C}_L$  sont les coefficients de force basés sur la vitesse locale, c'est-à-dire  $U_R$ .

Comme nous l'avons vu dans le premier chapitre, la théorie quasi-stationnaire postule que la vitesse de déplacement du cylindre est bien inférieure à celle du fluide. En d'autre terme nous sommes dans l'hypothèse des petits déplacements, on considère alors que :

$$U_R = U_G \left( 1 - \frac{\dot{x}}{U_G} \right) \quad (2.4)$$

$$\cos(\alpha) \approx 1 \quad ; \quad \sin(\alpha) \approx \frac{\dot{y}}{U_G} \quad (2.5)$$

De plus nous savons que les coefficients de force basés sur la vitesse globale  $U_\infty$  sont :

$$C_{D/L} = \frac{U_R^2}{U_\infty^2} \bar{C}_{D/L} \quad (2.6)$$

On trouve ainsi, en ne gardant que les termes de premier ordre, la forme des forces fluide utilisée par la suite :

$$F_x = \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 l D [C_D (1 - 2 \dot{x} / U_G) + C_L \dot{y} / U_G] \quad (2.7)$$

$$F_y = \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 l D [C_L (1 - 2 \dot{x} / U_G) + C_D \dot{y} / U_G] \quad (2.8)$$

## 2.5 Coefficients de forces

Afin de bien calculer les forces induites par le fluide, il est important de trouver les bonnes valeurs des coefficients de forces. Pour cela, Price et Païdoussis utilisent une forme linéarisée des expressions de ces coefficients qui n'est autre que le développement en série de Taylor dans le repère local  $(\xi, \eta)$  :

$$C_L = C_L + \sum_{i=C,1}^6 \left( \xi_i \frac{\partial C_L}{\partial \xi_i} + \eta_i \frac{\partial C_L}{\partial \eta_i} \right) \quad (2.9)$$

$$C_D = C_D + \sum_{i=C,1}^6 \left( \xi_i \frac{\partial C_D}{\partial \xi_i} + \eta_i \frac{\partial C_D}{\partial \eta_i} \right) \quad (2.10)$$

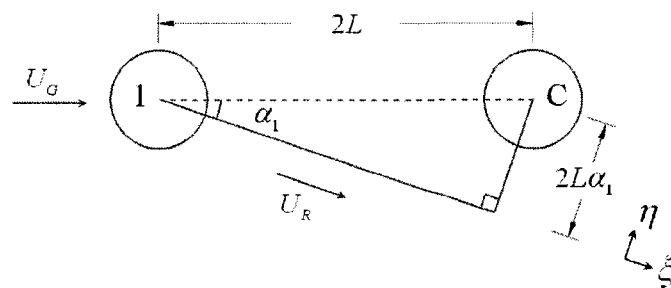
### 2.5.1 Déplacement apparent

Le changement d'angle d'attaque de l'écoulement entraîne relativement au repère local un déplacement "apparent" des cylindres. Les fonctions  $\xi_i$  et  $\eta_i$  représentent ces déplacements dans ce repère. Deux phénomènes rentrent en jeu pour la définition de ces fonctions : les déplacements des cylindres mais aussi un temps de latence.

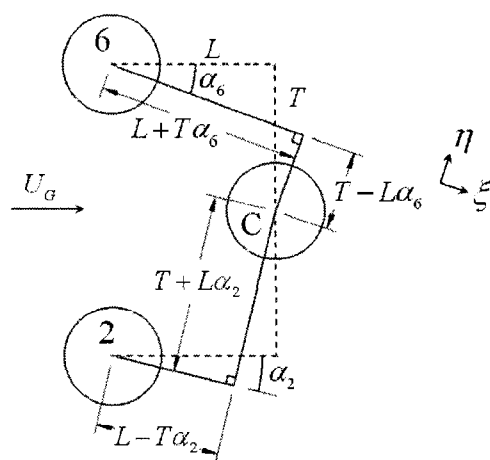
Les figures 2.5(a), 2.5(b), 2.5(c) représentent comment Price et Païdoussis ont opérés pour obtenir ces déplacements. Du fait de la vitesse relative, les forces de trainée et portance ne sont plus suivant  $X$  et  $Y$ , on prend alors un système de coordonnées local attaché au cylindre central et aligné avec les directions de ces forces. Il faut donc définir l'écart entre les différents cylindre suivant le nouveau repère local. L'écart entre la distance inter-cylindre dans le repère  $(X,Y)$  et celle dans le repère  $(\xi,\eta)$  est donc par définition le déplacement apparent. On considère toujours que les déplacements engendrés sont petits.

Mathématiquement, on obtient alors les déplacements suivants :

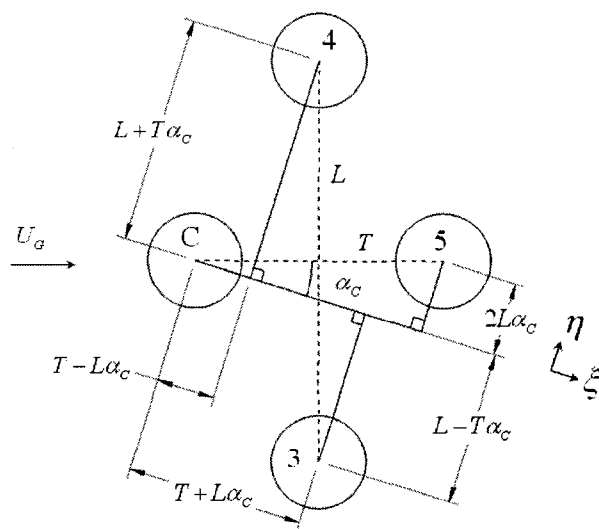
$$\begin{aligned}
 \Delta\xi_1 &= 0 & , & \Delta\eta_1 = -2L\alpha_1 \\
 \Delta\xi_2 &= T\alpha_2 & , & \Delta\eta_2 = -L\alpha_2 \\
 \Delta\xi_3 &= T\alpha_C & , & \Delta\eta_3 = L\alpha_C \\
 \Delta\xi_4 &= 0 & , & \Delta\eta_4 = 2L\alpha_C \\
 \Delta\xi_5 &= -T\alpha_C & , & \Delta\eta_5 = L\alpha_C \\
 \Delta\xi_6 &= -T\alpha_3 & , & \Delta\eta_6 = -L\alpha_3
 \end{aligned} \tag{2.11}$$



(a)



(b)



(c)

FIG. 2.5 Schéma des déplacements apparents dus aux mouvements des cylindres  
 (a) Cylindre 1 (b) Cylindre 2 et 6 (c) Cylindre 3, 4 et 5.

### 2.5.2 Temps de latence

L'effet de ces déplacements n'est cependant pas instantané. Deux phénomènes rentrent en ligne de compte : Il y a en effet un temps de latence entre le déplacement de chaque cylindre voisin et la variation de la force induite sur le cylindre central pour ces déplacements. Price et Païdoussis <sup>[29]</sup>, suivant les travaux de Simpson et Flower <sup>[34]</sup>, montrent alors que ce temps de latence résulte en un déplacement apparent supplémentaire de chaque cylindre dans la direction de l'écoulement, qui peut être défini par :

$$\Delta\xi'_i = x_i(t - \tau_i - \delta t) + \tau_i \dot{x}_i(t - \tau_i - \delta t) \quad (2.12)$$

$$\Delta\eta'_i = y_i(t - \tau_i - \delta t) \quad (2.13)$$

On définit le temps  $\tau_i$  comme le temps que mettent les particules du fluide perturbé par les cylindres voisins pour atteindre le cylindre central :

$$\tau_i = S_i/U_G \quad (2.14)$$

La distance  $S_i$  entre chaque cylindre étant la même, pour notre configuration lorsque nous suivons la direction de l'écoulement, nous avons donc un temps de latence constant  $\tau_i = \tau$ .

Le deuxième phénomène mis en jeu est dû à la région de stagnation en amont du cylindre. En effet, le retard accumulé par le fluide approchant la région de stagnation du cylindre est non-négligeable. Simpson et Flower <sup>[34]</sup> montrent alors que le fluide arrivant sur le cylindre au temps  $t$  n'est pas celui qui devrait être associé à la vitesse prise dans la théorie quasi-stationnaire mais plutôt le fluide au temps  $t + \delta t$ . Ils modélisent ce temps de latence  $\delta t$  de la façon suivante :

$$\delta t = \mu D/U_G \quad (2.15)$$

Où  $\mu$  est un coefficient empirique dont la valeur, selon Simpson and Flower [34], est d'environ 1. Ce temps de retard s'appliquent à tous les cylindres (central et voisins) alors qu'il est évident que le premier temps de latente ne s'applique qu'aux cylindres avoisinant le cylindre central.

## 2.6 Résolution des équations de mouvement

Afin de simplifier la résolution du système d'équation, Price and Païdoussis supposent le mouvement de ces tubes harmonique et de même amplitude :

$$x_i(t) = x_{io} \exp(\lambda t + \varphi_{ix}) \quad , \quad y_i(t) = y_{io} \exp(\lambda t + \varphi_{iy}) \quad (2.16)$$

Où  $\lambda$  est la valeur propre du système matriciel (2.1) et  $(\varphi_{ix}, \varphi_{iy})$  la différence de phase le cylindre de référence et celui étudié.

De plus les déplacements étant petits, l'angle d'attaque peut être défini de la façon suivante :

$$\alpha_i(t - \tau - \delta t) = \dot{y}_i(t - \tau - \delta t)/U_G \quad (2.17)$$

$$\alpha_C(t - \delta t) = \dot{y}_C(t - \delta t)/U_G \quad (2.18)$$

Grâce aux équations 2.16, 2.17 et 2.18, on obtient les expressions des déplacements et des vitesses des cylindres :

$$x_i(t - \tau - \delta t) = \exp(-\tau\lambda)\exp(-\delta t\lambda)x_i(t) = g\bar{g}x_i(t) \quad (2.19)$$

$$\dot{x}_i(t - \tau - \delta t) = g\bar{g}\dot{x}_i(t) = g\bar{g}\lambda x_i(t) \quad (2.20)$$

où  $g = \exp(-\tau\lambda)$  et  $\bar{g} = \exp(-\delta t\lambda)$ .

Combinant ces équations avec les égalités 2.12 et 2.13, on obtient ainsi une forme générale du déplacement apparent de chaque cylindre du au temps de latente entre le mouvement du fluide et son actuel influence sur la force induite.

Ainsi, l'addition des deux déplacements donne alors le déplacement apparent total de chaque cylindre dans le système local de coordonnée en fonction des coordonnées globales  $x_i$  et  $y_i$  :

$$\xi_i = \Delta\xi_i + \Delta\xi'_i = g\bar{g}x_i(1 + \tau\lambda) + \Delta\xi'_i \quad (2.21)$$

$$\eta_i = \Delta\eta_i + \Delta\eta'_i = g\bar{g}y_i + \Delta\eta'_i \quad (2.22)$$

Cela donne :

$$\begin{aligned} \xi_C &= \bar{g}x_C & , \quad \eta_C &= \bar{g}y_C \\ \xi_1 &= g\bar{g}x_1(1 + \tau\lambda) & , \quad \eta_1 &= g\bar{g}y_1(1 - 2L\lambda/U_G) \\ \xi_2 &= g\bar{g}[x_2(1 + \tau\lambda) + T\lambda y_2/U_G] & , \quad \eta_2 &= g\bar{g}y_2(1 - L\lambda/U_G) \\ \xi_3 &= g\bar{g}x_3(1 + \tau\lambda) + \bar{g}T\lambda y_C/U_G & , \quad \eta_3 &= g\bar{g}y_3 + \bar{g}L\lambda y_C/U_G \\ \xi_4 &= g\bar{g}x_4(1 + \tau\lambda) & , \quad \eta_4 &= g\bar{g}y_4 + 2\bar{g}L\lambda y_C/U_G \\ \xi_5 &= g\bar{g}x_5(1 + \tau\lambda) - \bar{g}T\lambda y_C/U_G & , \quad \eta_5 &= g\bar{g}y_5 + \bar{g}L\lambda y_C/U_G \\ \xi_6 &= g\bar{g}[x_6(1 + \tau\lambda) - T\lambda y_6/U_G] & , \quad \eta_6 &= g\bar{g}y_6(1 - L\lambda/U_G) \end{aligned} \quad (2.23)$$

Étant donné l'hypothèse des petits déplacements, il est possible de négliger le déplacement transversal  $y$  pour le calcul des dérivées de stabilité, donc :

$$\frac{\partial C_D}{\partial \xi_i} \simeq \frac{\partial C_D}{\partial x_i} \quad ; \quad \frac{\partial C_D}{\partial \eta_i} \simeq \frac{\partial C_D}{\partial y_i} \quad (2.24)$$



Cette théorie conduit alors au système matriciel à résoudre suivant :

$$\begin{aligned}
C_{LC} = C_{Lo} &+ \bar{g} \{ \quad x_C \frac{\partial C_L}{\partial x_C} &+ y_C \frac{\partial C_L}{\partial y_C} \\
&+ g x_1 (1 + \tau \lambda) \frac{\partial C_L}{\partial x_1} &+ g y_1 (1 - 2L\lambda/U_G) \frac{\partial C_L}{\partial y_1} \\
&+ g [x_2 (1 + \tau \lambda) + T\lambda y_2/U_G] \frac{\partial C_L}{\partial x_2} &+ g y_2 (1 - L\lambda/U_G) \frac{\partial C_L}{\partial y_2} \\
&+ [g x_3 (1 + \tau \lambda) + T\lambda y_C/U_G] \frac{\partial C_L}{\partial x_3} &+ [g y_3 + L\lambda y_C/U_G] \frac{\partial C_L}{\partial y_3} \\
&+ g x_4 (1 + \tau \lambda) \frac{\partial C_L}{\partial x_4} &+ [g y_4 + 2L\lambda y_C/U_G] \frac{\partial C_L}{\partial y_4} \\
&+ [g x_5 (1 + \tau \lambda) - T\lambda y_C/U_G] \frac{\partial C_L}{\partial x_5} &+ [g y_5 + L\lambda y_C/U_G] \frac{\partial C_L}{\partial y_5} \\
&+ g [x_6 (1 + \tau \lambda) - T\lambda y_6/U_G] \frac{\partial C_L}{\partial x_6} &+ g y_6 (1 - L\lambda/U_G) \frac{\partial C_L}{\partial y_6} \} \quad \}
\end{aligned} \tag{2.25}$$

$$\begin{aligned}
C_{DC} = C_{Do} &+ \bar{g} \{ \quad x_C \frac{\partial C_D}{\partial x_C} &+ y_C \frac{\partial C_D}{\partial y_C} \\
&+ g x_1 (1 + \tau \lambda) \frac{\partial C_D}{\partial x_1} &+ g y_1 (1 - 2L\lambda/U_G) \frac{\partial C_D}{\partial y_1} \\
&+ g [x_2 (1 + \tau \lambda) + T\lambda y_2/U_G] \frac{\partial C_D}{\partial x_2} &+ g y_2 (1 - L\lambda/U_G) \frac{\partial C_D}{\partial y_2} \\
&+ [g x_3 (1 + \tau \lambda) + T\lambda y_C/U_G] \frac{\partial C_D}{\partial x_3} &+ [g y_3 + L\lambda y_C/U_G] \frac{\partial C_D}{\partial y_3} \\
&+ g x_4 (1 + \tau \lambda) \frac{\partial C_D}{\partial x_4} &+ [g y_4 + 2L\lambda y_C/U_G] \frac{\partial C_D}{\partial y_4} \\
&+ [g x_5 (1 + \tau \lambda) - T\lambda y_C/U_G] \frac{\partial C_D}{\partial x_5} &+ [g y_5 + L\lambda y_C/U_G] \frac{\partial C_D}{\partial y_5} \\
&+ g [x_6 (1 + \tau \lambda) - T\lambda y_6/U_G] \frac{\partial C_D}{\partial x_6} &+ g y_6 (1 - L\lambda/U_G) \frac{\partial C_D}{\partial y_6} \} \quad \}
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Il peut cependant être simplifié grâce à certaines considérations. Lorsque les cylindres 1,  $C$  et 4 se déplacent transversalement par rapport à l'écoulement, la traînée du cylindre  $C$  n'est pas affectée donc :

$$\frac{\partial C_D}{\partial y_1} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial C_D}{\partial y_C} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial C_D}{\partial y_4} = 0 \quad (2.27)$$

Lorsque les cylindres 1,  $C$  et 4 se déplacent dans le sens de l'écoulement, la portance du cylindre  $C$  n'est pas modifiée :

$$\frac{\partial C_L}{\partial x_1} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial C_L}{\partial x_C} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial C_L}{\partial x_4} = 0 \quad (2.28)$$

D'autres relations de symétrie apparaissent dues à la configuration géométrique des cylindres :

$$\frac{\partial C_D}{\partial x_2} = \frac{\partial C_D}{\partial x_6} \quad , \quad \frac{\partial C_L}{\partial x_2} = \frac{\partial C_L}{\partial x_6} \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial C_D}{\partial x_3} = \frac{\partial C_D}{\partial x_5} \quad , \quad \frac{\partial C_L}{\partial x_3} = \frac{\partial C_L}{\partial x_5} \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial C_D}{\partial y_2} = \frac{\partial C_D}{\partial y_6} \quad , \quad \frac{\partial C_L}{\partial y_2} = \frac{\partial C_L}{\partial y_6} \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial C_D}{\partial y_3} = \frac{\partial C_D}{\partial y_5} \quad , \quad \frac{\partial C_L}{\partial y_3} = \frac{\partial C_L}{\partial y_5} \quad (2.32)$$

Finalement, il est important de se rappeler que dans la réalité le faisceau de cylindre comporte un nombre très grand de cylindres que l'on considère infini. Ainsi, par exemple, pour un écoulement réel le cylindre 2 à la même influence sur le cylindre

$C$  que le cylindre  $C$  a sur le cylindre 5, ceci se traduit mathématiquement par :

$$\frac{\partial C_{LC}}{\partial y_2} = \frac{\partial C_{L5}}{\partial y_C} \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial C_{DC}}{\partial y_2} = \frac{\partial C_{D5}}{\partial y_C} \quad (2.34)$$

L'influence du cylindre central  $C$  est la seule influence qu'il est alors nécessaire de connaître pour résoudre ce système. Plus généralement, nous avons  $\forall i \in [1, 6]$  (l'indice  $i$  étant modulo 6) :

$$\frac{\partial C_{DC}}{\partial x_i} = \frac{\partial C_{D(i+3)}}{\partial x_C} \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial C_{LC}}{\partial x_i} = \frac{\partial C_{L(i+3)}}{\partial x_C} \quad (2.36)$$

Nous avons les mêmes relations suivant la direction transversale  $y$ . Considérant toutes ces hypothèses et utilisant les équations 2.26 et 2.25, nous obtenons les relations suivantes pour les coefficients de force du cylindre central :

$$\begin{aligned} C_{DC} = C_{D0} &+ \bar{g} \{ \quad 0 \quad + \quad y_C \frac{\partial C_{DC}}{\partial y_C} \\ &+ \quad 0 \quad + \quad gy_1(1 - 2L\lambda/U_G) \frac{\partial C_{D4}}{\partial y_C} \\ &+ \quad g[x_2(1 + \tau\lambda) + T\lambda y_2/U_G] \frac{\partial C_{D5}}{\partial x_C} \quad + \quad gy_2(1 - L\lambda/U_G) \frac{\partial C_{D5}}{\partial y_C} \\ &+ \quad [gx_3(1 + \tau\lambda) + T\lambda y_C/U_G] \frac{\partial C_{D6}}{\partial x_C} \quad + \quad [gy_3 + L\lambda y_C/U_G] \frac{\partial C_{D6}}{\partial y_C} \quad (2.37) \\ &+ \quad 0 \quad + \quad [gy_4 + 2L\lambda y_C/U_G] \frac{\partial C_{D1}}{\partial y_C} \\ &+ \quad [gx_5(1 + \tau\lambda) - T\lambda y_C/U_G] \frac{\partial C_{D2}}{\partial x_C} \quad + \quad [gy_5 + L\lambda y_C/U_G] \frac{\partial C_{D2}}{\partial y_C} \\ &+ \quad g[x_6(1 + \tau\lambda) - T\lambda y_6/U_G] \frac{\partial C_{D3}}{\partial x_C} \quad + \quad gy_6(1 - L\lambda/U_G) \frac{\partial C_{D3}}{\partial y_C} \} \quad \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{LC} = C_{Lo} &+ \bar{g} \{ \quad x_C \frac{\partial C_{LC}}{\partial x_C} && + 0 \\
&+ g x_1 (1 + \tau \lambda) \frac{\partial C_{L4}}{\partial x_C} && + 0 \\
&+ g [x_2 (1 + \tau \lambda) + T \lambda y_2 / U_G] \frac{\partial C_{L5}}{\partial x_C} &+ g y_2 (1 - L \lambda / U_G) \frac{\partial C_{L5}}{\partial y_C} \\
&+ [g x_3 (1 + \tau \lambda) + T \lambda y_C / U_G] \frac{\partial C_{L6}}{\partial x_C} &+ [g y_3 + L \lambda y_C / U_G] \frac{\partial C_{L6}}{\partial y_C} \\
&+ g x_4 (1 + \tau \lambda) \frac{\partial C_{L1}}{\partial x_C} && + 0 \\
&+ [g x_5 (1 + \tau \lambda) - T \lambda y_C / U_G] \frac{\partial C_{L2}}{\partial x_C} &+ [g y_5 + L \lambda y_C / U_G] \frac{\partial C_{L2}}{\partial y_C} \\
&+ g [x_6 (1 + \tau \lambda) - T \lambda y_6 / U_G] \frac{\partial C_{L3}}{\partial x_C} &+ g y_6 (1 - L \lambda / U_G) \frac{\partial C_{L3}}{\partial y_C} \} \quad \}
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Cette procédure est appliquée afin d'obtenir les coefficients de force pour chaque cylindre. Nous avons défini les forces fluides en fonction des coordonnées globales du système. Il suffit donc de résoudre le système matriciel 2.1. Ce système sera instable lorsque l'une de ses valeurs propre aura une partie réelle supérieure ou égale à zéro.

Cette théorie permet d'obtenir une bonne approximation des vitesses critiques et donc du domaine d'instabilité fluide-élastique d'un faisceau de tube. Cependant, même si nous prenons un faisceau caractéristique, le système matriciel qui en résulte est lourd et complexe à résoudre. De plus, si nous considérons le faisceau caractéristique de tube isolé, les prédictions ne refléteront pas complètement la réalité à cause des effets de couplage omis. Price et Païdoussis proposent d'utiliser une méthode développée par Whiston et Thomas <sup>[42]</sup> appelée analyse des modes contraints qui consiste à réduire l'analyse du faisceau caractéristique à celle d'un noyau de deux cylindres en tenant compte de la plupart des couplages rencontrés

dans une configuration réelle.

## 2.7 Méthodes d'analyse des modes contraints

Cette analyse part du principe que lorsque les cylindres entrent en instabilité, une différence de phase apparaît dans les deux directions entre les cylindres pour les déplacements transversaux et longitudinaux. Elle postule qu'il est ainsi possible de connaître approximativement la vitesse critique d'instabilité en ne considérant que deux cylindres ( C et B sur la figure 2.6).

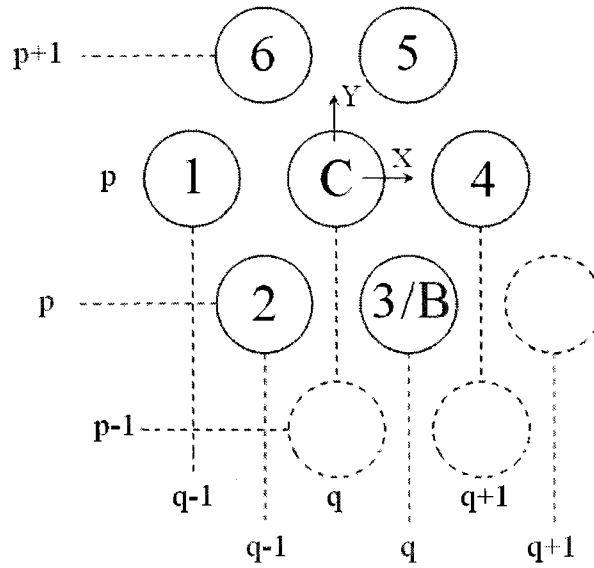


FIG. 2.6 Schématisation pour la méthode des modes contraints

Voici comment ils procèdent. Le mouvement du cylindre se trouvant à la colonne  $p$  et à la ligne  $q$  se modélise tel que :

$$x_{p,q}^{C/B} = x_o \exp(\lambda t + ip\varphi_x + iq\theta_x) \quad (2.39)$$

$$y_{p,q}^{C/B} = y_o \exp(\lambda t + ip\varphi_y + iq\theta_y) \quad (2.40)$$

où  $i = \sqrt{-1}$ ,  $C/B$  définit si le système de coordonnées  $(p,q)$  est centré sur  $C$  ou  $B$ .  $\varphi_x$  and  $\theta_x$  sont les différences de phases suivant  $X$  relativement aux cylindre étudié, et  $\varphi_y$  et  $\theta_y$  les différences de phase correspondantes suivant  $Y$ .

Ainsi le déplacement du cylindre 1 suivant la direction  $X$  est :

$$\begin{aligned}
 x_1 = x_{p,q-1}^C &= x_o \exp(\lambda t + ip\varphi_x + i(q-1)\theta_x) \\
 &= x_o \exp(\lambda t + ip\varphi_{Cx} + iq\theta_x) \exp(-i\theta_x) \\
 &= x_{p,q}^C \exp(-i\theta_x)
 \end{aligned} \tag{2.41}$$

Le mouvement du cylindre 4 est aussi relatif à  $C$ . Pour les cylindres 5, 6 et 2, leurs déplacements doivent être écrit relativement au déplacement du cylindre  $B$ . Par exemple :

$$x_5 = x_{p+1,q}^B = x_{p,q}^B \exp(i\varphi_x) \tag{2.42}$$

Ainsi, étant donné que tout mouvement des cylindres du faisceau peuvent être déterminé en fonction de ceux des cylindres  $C$  et  $B$ , le noyau B-C est totalement découplé du reste de la configuration.

Le système matriciel 2.1 devient donc définit par les coordonnées du noyau B-C. Il est donc important de déterminer les forces fluides agissant sur ce noyau. Pour ce faire nous utilisons les équations 2.7 et 2.8 associées aux équations 2.25 et 2.26 sur le cylindre  $C$  puis le cylindre  $B$  (en centrant le numérotage des cylindre sur  $B$  et non plus  $C$ ). L'étude étant faite pour une configuration infinie de cylindres, les cylindres  $C$  et  $B$  jouent le même rôle et sont entourés du même nombre de cylindres, nous pouvons prendre alors les même dérivées de stabilité pour le calcul

des forces fluides et écrire :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_o + [\mathbf{K}_f]\mathbf{X} + [\mathbf{C}_f]\dot{\mathbf{X}} \quad (2.43)$$

où  $\mathbf{X}$  est désormais réduit à  $\mathbf{X} = (x_C, y_C, x_B, y_B)^T$

$\mathbf{F}_o = 1/2 \rho D l U_\infty^2 (C_{Do}, 0, C_{Do}, 0)^T$ , les forces quasi-stationnaires agissant sur les cylindres  $C$  et  $B$ .

$[\mathbf{C}_f] = 1/2 \rho D^2 l U_\infty^2 / U_G [\bar{\mathbf{C}}_f]$ , la matrice d'amortissement du fluide ;

$[\mathbf{K}_f] = 1/2 \rho D^2 l U_\infty^2 \bar{g} [\bar{\mathbf{K}}_f]$ , la matrice de rigidité du fluide ;

Les différents coefficients de  $\bar{\mathbf{K}}_f$  et  $\bar{\mathbf{C}}_f$  sont exposés en annexe I.

Combinant (2.1) and (2.43), les équations de mouvement peuvent être alors écrites comme :

$$[\mathbf{M}]\ddot{\mathbf{X}} + \{[\mathbf{C}_s] - [\mathbf{C}_f]\} \dot{\mathbf{X}} + \{[\mathbf{K}_s] - [\mathbf{K}_f]\} \mathbf{X} = \mathbf{F}_o \quad (2.44)$$

Ainsi, de la même façon, en allant chercher les valeurs propres à partie réelle nulle, nous sommes capable de déterminer les vitesses critiques.

Cette théorie ne demandent ainsi que les dérivées de stabilité comme données d'entrée. Cependant ces dérivées sont assez durs à obtenir et demande de concevoir des systèmes expérimentaux lourds et très chers dont la précision des résultats sortis peut parfois laisser à désirer. Le but de cette maîtrise est donc de montrer que la Méthode des Équations de Sensibilités pourrait apporter un soutien

non-négligeable dans l'acquisition de ces données, permettant ainsi d'obtenir rapidement et à moindre coût ces dérivées de stabilité avec une précision remarquable. Le prochain chapitre présente cette méthode.



## CHAPITRE 3

### MÉTHODES NUMÉRIQUES

Ce chapitre expose d'abord les équations des écoulements stationnaires incompressibles visqueux utilisées dans le code numérique, puis décrit ensuite la théorie des équations de sensibilité.

#### 3.1 Équations pour le fluide

On s'intéresse aux écoulements stationnaires incompressibles visqueux. On utilise les équations de Navier-Stokes pour modéliser le comportement du fluide. La masse volumique du fluide  $\rho$  est constante. La formulation *eulérienne* des équations de *continuité* et de *mouvement* s'écrivent :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.1)$$

$$\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (3.2)$$

où  $\mathbf{u}$  est le vecteur vitesse du fluide,  $\rho$  sa masse volumique et  $\boldsymbol{\sigma}$  le tenseur des contraintes. Le fluide est incompressible ( $\rho = cte$ ) et supposé Newtonien :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mu(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) - p\mathbf{I} = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}) - p\mathbf{I} \quad (3.3)$$

où  $\mu$  est la viscosité du fluide ( on la considère constante ).  $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u})$  représente les contraintes visqueuses et  $p$  les contraintes de pression.

Les conditions aux frontières sont de deux types :

Les conditions de valeurs, dites conditions de *Dirichlet* :

$$\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \bar{u} \quad \text{on} \quad \Gamma_D \quad (3.4)$$

Les conditions de flux, dites les conditions de *Neumann* :

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \bar{t} \quad \text{on} \quad \Gamma_N \quad (3.5)$$

où  $\bar{u}$  est la valeur du champ de vitesse  $u$  sur la frontière et  $\bar{t}$  est la valeur de la contrainte tangentielle sur la frontière. Ces conditions sont respectivement imposées sur les frontières notées  $\Gamma_D$  et  $\Gamma_N$

On passe maintenant aux équations de sensibilité.

## 3.2 Méthode des Équations de Sensibilité

### 3.2.1 Généralités

On définit la sensibilité comme le taux de variation d'une variable dépendante  $\Phi(x, y; a)$  par rapport à un paramètre d'intérêt  $a$ , donc :

$$s_\Phi^a = \frac{\partial \Phi}{\partial a}(x, y; a) \quad (3.6)$$

Afin d'alléger la notation, on notera  $s_\Phi$  lorsqu'il n'y aura pas de confusion possible.

Pour rattacher la Méthode des Équations de Sensibilités au modèle fluide-élastique, nous illustrerons la théorie avec comme exemple un écoulement dans une conduite obstruée par un cylindre (voir Fig. 3.1).

Le champ de vitesse  $(u, v)$  va donc dépendre des paramètres suivants :

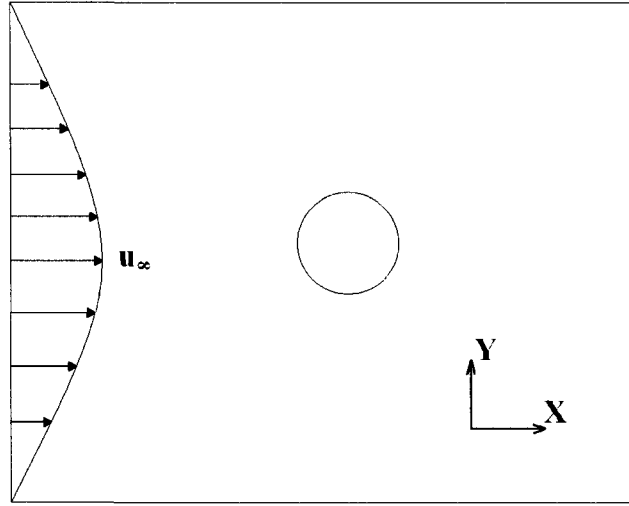


FIG. 3.1 Écoulement dans une conduite obstruée par un cylindre

- $\rho$  et  $\mu$  la densité et viscosité du fluide.
- $u_\infty$  la vitesse en entrée.
- $L$  la largeur de conduite.
- $D$  le diamètre du cylindre.
- $(x_C; y_C)$  la position du cylindre dans la conduite.

La sensibilité de la composante longitudinale  $u(x, y; a)$  du champ de vitesse par rapport aux paramètres  $a \in \{\rho, \mu, u_\infty, L, D, x_C, y_C\}$  est définie par :

$$s_u = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial a}(x, y; a) \quad (3.7)$$

$s_u$  représente donc la réponse physique du champ de vitesse longitudinale à des perturbations unitaires du paramètre  $a$ . On la retrouve dans le développement de Taylor au voisinage de  $a_0$ , la valeur d'origine du paramètre :

$$\mathbf{u}(x, y; a_0 + \delta a) = \mathbf{u}(x, y; a) + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial a}(x, y; a_0) \delta a \quad (3.8)$$

On distingue deux catégories de paramètres en analyse de sensibilité : les paramètres qui n'affectent que le comportement du système, appelés paramètres de valeur et les paramètres qui affectent aussi la géométrie appelés paramètres de forme.

**Les paramètres de valeur** n'affectent pas la géométrie du domaine étudié. Typiquement, ce sont en général des propriétés physiques ou des conditions aux limites traduisant le comportement de l'écoulement.

La géométrie étudiée n'étant pas affectée par des changements de valeur de ce genre de paramètre, nous pouvons conclure que la sensibilité d'une variable dépendante  $\Phi(x, y; a)$  est égale à sa dérivée totale :

$$\frac{D\Phi}{Da}(x, y; a) = \frac{\partial\Phi}{\partial a}(x, y; a) \quad (3.9)$$

Dans l'exemple précédent, les paramètres de valeur sont :

$$a \in \{\rho, \mu, u_\infty\} \quad (3.10)$$

**Les paramètres de forme** modifient la géométrie étudiée lorsque l'on change leur valeur. Ce changement de géométrie peut être décrit par deux variables :

- le paramètre de forme  $a$  pour décrire la forme de la courbe.
- la position  $\xi$  du point considéré sur la courbe.

Ainsi, tout point  $\hat{X}$  de la courbe frontière  $\Gamma_a$ , dépendant de  $a$ , peut être repérée grâce à la paramétrisation suivante :

$$\Gamma_a = \left\{ \hat{X}(\xi, a) \mid \xi \in [\xi_0, \xi_1] \right\} \quad (3.11)$$

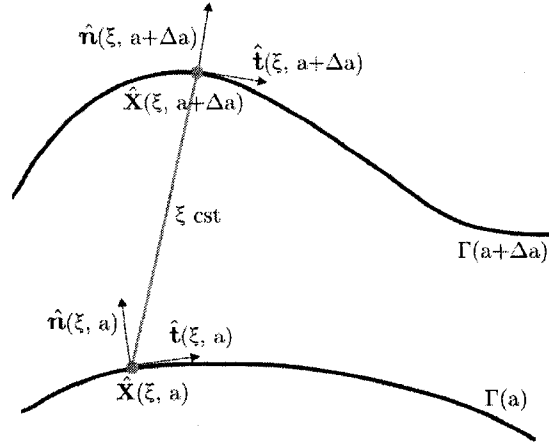


FIG. 3.2 Paramétrisation de la courbe mobile

Nous pouvons ainsi, comme le montre la figure 3.2, suivre la déformation de la courbe engendrée par le changement de valeur de  $a$

Les vecteurs, normal  $\hat{n}(\xi, a)$  et tangent  $\hat{t}(\xi, a)$ , sont définis de la façon suivante :

$$\hat{n} = \left\| \frac{\partial \hat{X}}{\partial \xi} \right\|^{-1} \left[ -\frac{\partial \hat{y}}{\partial \xi}, -\frac{\partial \hat{x}}{\partial \xi} \right]^T \quad ; \quad \hat{t} = \left\| \frac{\partial \hat{X}}{\partial \xi} \right\|^{-1} \left[ \frac{\partial \hat{x}}{\partial \xi}, -\frac{\partial \hat{y}}{\partial \xi} \right]^T \quad (3.12)$$

La sensibilité de forme se définit à partir de la dérivée totale de la variable dépendante  $\Phi(\hat{X}(\xi, a); a)$  par rapport à  $a$  car  $\Phi$  et  $X$  dépendent de  $a$  :

$$\frac{D\Phi}{Da}(\hat{X}(\xi, a), a) = \frac{\partial \Phi}{\partial a} + \nabla \Phi \cdot \frac{\partial \hat{X}}{\partial a} \quad (3.13)$$

Le deuxième terme  $\nabla \Phi \cdot \frac{\partial \hat{X}}{\partial a}$  porte le nom de *terme de transpiration* car il représente le mur de la frontière. La sensibilité de la géométrie  $\Pi_a = \frac{\partial \hat{X}}{\partial a}$  ne peut cependant pas être définie directement, la seule information physique que nous possédons est le déplacement de la géométrie par rapport au repère fixe, soit la dérivée totale de

$\hat{X}$  par rapport à  $a$ . Et c'est là qu'apparaît tout l'intérêt de cette paramétrisation. Comme illustré sur la figure 3.2, si nous considérons un point sur la frontière  $\Gamma$ ,  $\xi$  reste constant lorsque  $a$  varie,  $\xi$  et  $a$  étant donc indépendants, cela conduit à la relation suivante :

$$\frac{\partial \hat{X}}{\partial a}(\xi, a) = \frac{D\hat{X}}{Da} \quad (3.14)$$

On peut ainsi trouver la sensibilité d'une variable dépendante  $\Phi(\hat{X}(\xi, a); a)$  en utilisant la dérivée matérielle de cette variable et de la frontière :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a} = \frac{D\Phi}{Da} - \nabla \Phi \cdot \frac{D\hat{X}}{Da} \quad (3.15)$$

Dans l'exemple vu précédemment, nous avons alors :

$$a \in \{L, D, x_C, y_C\} \quad (3.16)$$

Si nous prenons comme paramètre de forme la coordonnée  $y_C$  du cylindre, on décrit la forme de la courbe avec le paramètre  $a = y_C$  et on se positionne sur la courbe avec  $\xi = \theta$  (voir figure 3.3).

Le mouvement à la frontière est alors :

$$\frac{\partial \hat{X}}{\partial a}(\hat{X}(\xi, a), a) = \frac{D\hat{X}}{Da} = [0; \Delta Y_C]^T \quad (3.17)$$

Ces sensibilités, quelque soit leur type, sont alors les inconnues à trouver dans les Équations de sensibilité.

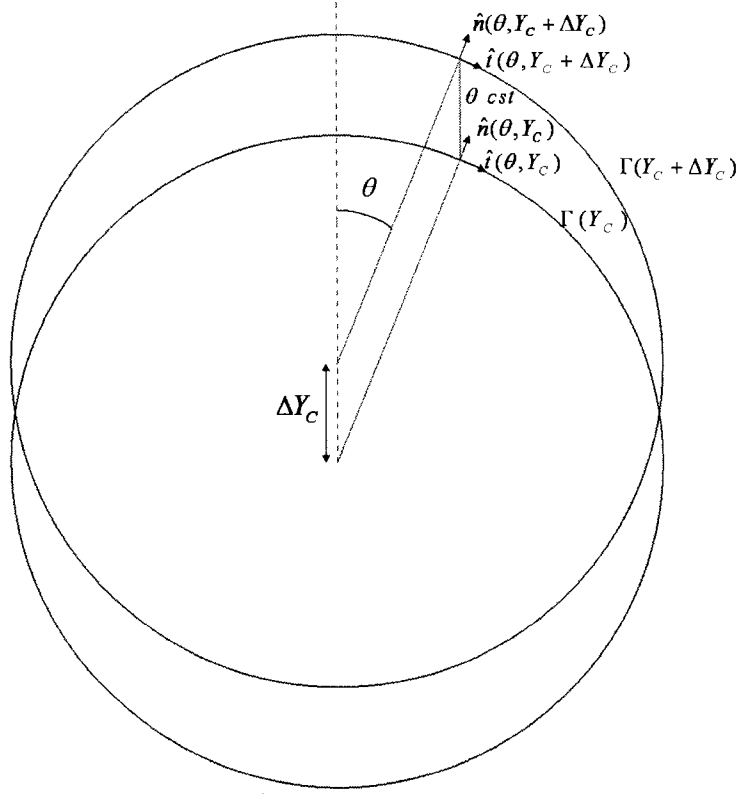


FIG. 3.3 Paramétrisation pour un cylindre en translation suivant  $Y_C$ .

### 3.2.2 Équations de sensibilité

Deux méthodes sont possibles pour trouver les sensibilités de l'écoulement :

- On discrétise les équations pour le fluide puis on les dérive, il s'agit de l'approche par Équation de Sensibilité Discrète (*DSE approach* pour *Discret Sensitivity Equation approach*).
- On dérive les équations pour le fluide pour obtenir les équations de sensibilité qui sont ensuite discrétisées, il s'agit de l'approche par Équation de Sensibilité Continue (*CSE approach* pour *Continuous Sensitivity Equation approach*).

La méthode CSE offre certains avantages par rapport à la méthode DSE [4, 13]. Tout d'abord dans le cas des paramètres de forme, la méthode CSE nous permet d'éviter la délicate opération de détermination d'évaluation de sensibilité de

maillage <sup>[21]</sup> ou l'usage de méthodes pour les approximer <sup>[16, 38]</sup>. Ensuite la méthode CSE permet d'éviter la dérivation de termes non-différentiables apparaissant dans l'approche DSE comme les limiteurs ou termes de stabilisation. Pour ces raisons nous adoptons la méthode CSE.

Comme nous l'avons donc vu, les sensibilités des variables de l'écoulement s'obtiennent en dérivant les équations pour le fluide par rapport à un paramètre arbitraire  $a$ . Les sensibilités du champ de vitesse et de la pression se définissent alors comme :

$$s_{\mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial a} \quad ; \quad s_p = \frac{\partial p}{\partial a} \quad (3.18)$$

Ce qui donne les équations de sensibilité suivantes :

$$\nabla \cdot s_{\mathbf{u}} = 0 \quad (3.19)$$

$$\rho(s_{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla s_{\mathbf{u}}) = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}' \quad (3.20)$$

avec  $\boldsymbol{\sigma}'$  la sensibilité du tenseur de contrainte, donnée par :

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mu (\nabla s_{\mathbf{u}} + (\nabla s_{\mathbf{u}})^T) - s_p \mathbf{I} = \boldsymbol{\tau}(s_{\mathbf{u}}) - s_p \mathbf{I} \quad (3.21)$$

### 3.2.3 Conditions aux limites pour les sensibilités

Les conditions aux frontières pour les sensibilités s'obtiennent par différentiation de celles de l'écoulement. Les seules informations physiques connues pour les sensibilités au niveau des frontières sont les dérivées matérielles des caractéristiques de l'écoulement, on définit donc les valeurs des sensibilités aux frontières en partant de la dérivée Lagrangienne. Aux frontières, la dérivée Lagrangienne d'une fonction



dépendante  $\Phi(x, y; a)$  est donc la dérivée Lagrangienne de la valeur  $\bar{\Phi}$  de  $\Phi$  à ces frontières :

$$\Phi = \bar{\Phi} \quad \text{sur} \quad \hat{X}(\xi, a) \quad (3.22)$$

$$\frac{D\Phi}{Da} = \frac{D\bar{\Phi}}{Da} \quad (3.23)$$

Ainsi en dérivant les équations 3.4 et 3.5, les conditions aux limites sont :

$$\frac{D\mathbf{u}}{Da} = \frac{D\bar{\mathbf{u}}}{Da} \quad \text{sur} \quad \Gamma_D(a) \quad (3.24)$$

$$\frac{D(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}})}{Da} = \frac{D\bar{\mathbf{t}}}{Da} \quad \text{sur} \quad \Gamma_N(a) \quad (3.25)$$

### Conditions aux limites pour paramètres de valeur

Les paramètres de valeur n'affectant pas la géométrie, les conditions sont :

$$\frac{D\mathbf{u}}{Da} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial a} = s_{\mathbf{u}} = \frac{D\bar{\mathbf{u}}}{Da} \quad \text{sur} \quad \Gamma_D(a) \quad (3.26)$$

$$\frac{D\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{Da} = [-s_p \mathbf{I} + \tau(s_{\mathbf{u}})] \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{D\bar{\mathbf{t}}}{Da} \quad \text{sur} \quad \Gamma_N(a) \quad (3.27)$$

La définition des conditions aux limites pour les paramètres de forme est un peu plus complexe.

### Conditions aux limites pour les paramètres de forme

Comme vu dans l'équation 3.15 , les paramètres de forme affectent la géométrie, la sensibilité d'une variable dépendante  $\Phi(\hat{X}(\xi, a); a)$  par rapport à  $a$  va alors aussi

être affectée :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a} = \frac{D\Phi}{Da} - \nabla \Phi \cdot \frac{D\hat{X}}{Da} \quad (3.28)$$

Les équations 3.24 et 3.28 pour  $\Phi = u$  nous donnent alors la condition de Dirichlet suivante :

$$s_u = \frac{D\bar{u}}{Da} - \nabla \mathbf{u} \cdot \frac{D\hat{X}}{Da} \quad (3.29)$$

Les équations 3.25 et 3.28 pour  $\Phi = \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}}$  nous donnent alors la condition de Dirichlet suivante :

$$\boldsymbol{\sigma}' = \frac{D\bar{\mathbf{t}}}{Da} - \nabla \boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{D\hat{X}}{Da} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} \text{soit } [-s_p \mathbf{I} + \tau(s_u)] \cdot \hat{\mathbf{n}} &= \frac{D\bar{\mathbf{t}}}{Da} - \left[ \nabla [-p \mathbf{I} + \tau(\mathbf{u})] \cdot \frac{\partial \hat{X}}{\partial a} \right] \cdot \hat{\mathbf{n}} \\ &\quad - [-p \mathbf{I} + \tau(\mathbf{u})] \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{n}}}{\partial a} \end{aligned} \quad (3.31)$$

La bonne évaluation de ces conditions aux frontières pour les sensibilités est une condition indispensable à la bonne résolution des équations de sensibilité. Cependant le terme de transpiration  $\nabla \boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{D\hat{X}}{Da}$  apparaissant dans l'équation 3.28 peut nuire à la précision de la résolution. En effet, son calcul nécessite la détermination des dérivées du vecteur vitesse  $\mathbf{u}$  à la frontière, terme qui est difficile à obtenir avec précision. Ce problème étant encore pire pour le calcul des conditions de Neumann car des dérivées d'ordre deux à la frontière sont nécessaires. Plusieurs méthodes existent afin d'augmenter l'ordre de précision pour le calcul de gradient à la frontière [14].

Nous avons donc exposé la méthode des équations de sensibilités, permettant ainsi d'obtenir n'importe quelle sensibilité du champ de vitesse et de pression. Voyons maintenant comment à partir de ces données, on obtient les forces résultantes et leur sensibilités.

### 3.3 Forces résultantes et leurs sensibilités

#### 3.3.1 Forces résultantes

Comme nous l'avons vu, le tenseur de contraintes s'exprime à partir du champ de vitesse et de pression. On obtient la force résultante agissant sur la géométrie étudiée en sommant, le long de cette géométrie, la composante normale à la frontière de ce tenseur, les forces de traînée et de portance s'obtiennent alors en projetant le résultat suivant  $x$  ou  $y$  :

$$F_D = \left( \int_{\Gamma_a} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{n} d\Gamma \right) \cdot \vec{x} = \int_{\Gamma_a} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{n}_x d\Gamma \quad (3.32)$$

$$F_L = \int_{\Gamma_a} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{n}_y d\Gamma \quad (3.33)$$

$F_D$  étant la force de traînée et  $F_L$  la force de portance. Nous pouvons donc obtenir pour chaque cylindre les forces résultantes de traînée et de portance qu'il subit. Ces valeurs nous permettent ensuite d'obtenir les coefficients de forces.

#### 3.3.2 Dérivées des forces résultantes

Pour calculer les dérivées de forces de traînée et de portance, nous calculons la dérivée matérielle des équations 3.32 et 3.33 en fonction du paramètre  $a$  étudié,

soit la sensibilité Lagrangienne de la force :

$$\frac{DF_D}{Da} = \frac{D}{Da} \left( \int_{\Gamma_a} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{n} d\Gamma \right) \cdot \vec{x} = \frac{D}{Da} \left( \int_{\Gamma_a} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{n}_x d\Gamma \right) \quad (3.34)$$

$$\frac{DF_L}{Da} = \frac{D}{Da} \left( \int_{\Gamma_a} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{n}_y d\Gamma \right) \quad (3.35)$$

De la même façon que pour les conditions aux limites, le calcul de ces dérivées est différents si nous étudions un paramètre de valeur ou si nous étudions un paramètre de forme.

Dans le cas d'un **paramètre de valeur** la frontière de la géométrie étudiée ne bouge pas. Aucun terme de transpiration intervient, de sorte que la dérivé de la force résultante est tout simplement la sensibilité de la force, les équations 3.34 et 3.35 deviennent alors :

$$\frac{DF_D}{Da} = s_{FD} = \left( \int_{\Gamma_a} s_{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{n}_x \right) d\Gamma \quad (3.36)$$

$$\frac{DF_L}{Da} = s_{FL} = \left( \int_{\Gamma_a} s_{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{n}_y \right) d\Gamma \quad (3.37)$$

Le calcul de la sensibilité eulérienne suffit donc à trouver la valeur recherchée.

Dans le cas d'un **paramètre de forme**, la frontière de la géométrie étant mobile et pouvant se déformer, d'autres termes non-nuls apparaissent.

$$\begin{aligned} \frac{D}{Da} \int_{\Gamma_a} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{n} d\Gamma &= \frac{D}{Da} \int_{\Gamma_a} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{n} \cdot J d\Gamma_0 \\ &= \int_{\Gamma_a} \left( \frac{D}{Da} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{n} \cdot J) \right) d\Gamma_0 \\ &= \int_{\Gamma_a} \left( \frac{D\boldsymbol{\sigma}}{Da} \cdot \hat{n} \cdot J + \boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{D\hat{n}}{Da} \cdot J + \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{n} \cdot \frac{DJ}{Da} \right) d\Gamma_0 \quad (3.38) \end{aligned}$$

Où  $J$  est le Jacobien de  $\hat{X}$ . Les dérivées  $\frac{DJ}{Da}$  et  $\frac{D\hat{n}}{Da}$  définissent alors la déformation de la géométrie.

Dans notre exemple, la dérivée de force s'obtient en prenant comme paramètre de forme la coordonnée  $X_C$  ou  $Y_C$  du cylindre. Le cylindre étant rigide, le Jacobien est constant,  $J = 1$ . De plus prendre  $X$  ou  $Y$  comme paramètre de forme traduit une simple translation du cylindre, le vecteur normal reste alors inchangé,  $\frac{D\hat{n}}{Da} = 0$ . Ainsi, la dérivée de force s'obtient avec :

$$\begin{aligned} \frac{D}{Da} \int_{\Gamma_a} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{n} d\Gamma &= \int_{\Gamma_a} \frac{D\boldsymbol{\sigma}}{Da} \cdot \hat{n} \cdot J d\Gamma_0 \\ &= \int_{\Gamma_a} (s_{\boldsymbol{\sigma}} + \nabla \boldsymbol{\sigma} \cdot \Pi_a) \cdot \hat{n} d\Gamma \end{aligned} \quad (3.39)$$

La dérivée de la force de traînée s'obtient alors en projetant suivant  $\vec{x}$  la somme de la sensibilité de  $\sigma$  et de son terme de transpiration :

$$\frac{DF_D}{DY_C} = \int_{\Gamma_a} (s_{\boldsymbol{\sigma}} + \nabla \boldsymbol{\sigma} \cdot \Pi_{Y_C}) \hat{n}_x d\Gamma \quad (3.40)$$

Nous avons donc présenté les différentes équations utilisées par le code numérique pour obtenir les différentes informations nécessaires à l'étude d'un écoulement. Voyons maintenant les méthodes de résolutions.

### 3.4 Méthode des éléments finis

#### 3.4.1 Formulation faible des équations et discrétisation

Les équations de fluide ainsi que les équations de sensibilités sont résolues par méthode de Galerkin. On obtient la formulation faible des équations en multipliant les équations de Navier-Stokes et de leur sensibilités par une fonction test puis en intégrant sur le domaine. On intègre ensuite par parties (théorème de Gauss) les termes du second ordre pour faire naturellement apparaître les conditions aux frontières de Neumann. Avec les fonctions test  $\delta p$ ,  $\delta \mathbf{u}$ ,  $\delta s_p$ , et  $\delta \mathbf{s}_u$ , les formes faibles des équations de continuité et de mouvement ainsi que leurs sensibilités sont :

$$\int_{\Omega} \delta p \nabla \cdot \mathbf{u} d\Omega = 0 \quad (3.41)$$

$$\int_{\Omega} \{\rho \delta \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla \delta \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}\} d\Omega = \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma} d\Gamma \quad (3.42)$$

$$\int_{\Omega} \delta s_p \nabla \cdot \mathbf{s}_u d\Omega = 0 \quad (3.43)$$

$$\int_{\Omega} \{\rho \delta \mathbf{s}_u (\mathbf{s}_u \cdot \nabla) \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \delta \mathbf{s}_u + \nabla \delta \mathbf{s}_u \cdot \boldsymbol{\sigma}'\} d\Omega = \int_{\Gamma} \delta \mathbf{s}_u \cdot \boldsymbol{\sigma}' d\Gamma \quad (3.44)$$

Comme la méthode de Galerkin le veut, on discrétise la forme faible sur le domaine fluide en prenant comme fonctions test les fonctions d'interpolation. Pour la composante longitudinale  $u$  de l'écoulement et sa sensibilité  $s_u$ , nous avons alors :

$$u^h = \sum_{i=1}^{n_u} u^i N_i^u \quad ; \quad s_u^h = \sum_{i=1}^{n_{s_u}} s_u^i N_i^{s_u} \quad (3.45)$$

où  $u^h$  et  $s_u^h$  sont les solutions éléments finis,  $n_u$  et  $n_{s_u}$  sont les nombres de noeuds

et  $N_i^u$  et  $N_i^{s_u}$  sont les fonctions d'interpolation. Les fonction tests sont alors :

$$\delta u_i^h = N_i^u \quad ; \quad \delta s_{ui}^h = N_i^{s_u} \quad (3.46)$$

Pour le calcul, nous utilisons un maillage non-structuré avec des éléments de type Taylor-Hood ( $P_2$ - $P_1$ ), les fonctions d'interpolations sont donc quadratiques pour la vitesse et linéaires pour la pression. Nous utilisons une pression continue entre les éléments pour la résolution du système.

### 3.4.2 Méthodes de résolution

#### 3.4.2.1 Méthode des reactions

Le principal intérêt de ces simulations numériques est d'obtenir les réactions des cylindres par rapport à l'écoulement. Pour cela nous utilisons la méthode des réactions <sup>[12]</sup>. La méthode consiste à faire apparaître les termes de réactions et les considérer comme des inconnues, on les injecte alors dans le système matriciel global. Ainsi, par exemple, lorsque nous nous trouvons près d'une frontière :

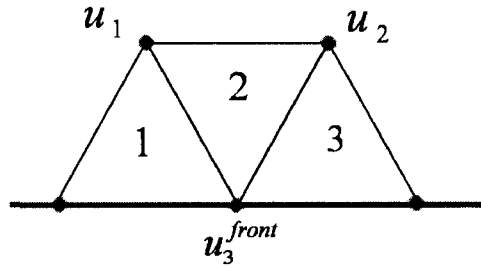


FIG. 3.4 Maillage près d'une frontière

Le système matriciel pour l'élément 2 étant originellement :

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3^{front} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3^{front} \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

devient alors :

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 \\ K_{21} & K_{22} & 0 \\ K_{31} & K_{23} & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ r_3^{front} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 - K_{13}u_3^{front} \\ r_2 - K_{23}u_3^{front} \\ -K_{33}u_3^{front} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

De façon plus générale, on reformule l'équation 3.45 pour faire apparaître la réaction  $\mathbf{r}^{front}$  à la frontière :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\delta \mathbf{u} \cdot \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla \delta \mathbf{u} : \boldsymbol{\sigma}) d\Omega \\ - \underbrace{\int_{\Gamma_{Front}} \delta \mathbf{u} \cdot (\boldsymbol{\sigma}) \delta \Gamma}_{\mathbf{r}^{front}} = \underbrace{\int_{\Gamma_N} \delta \mathbf{u} \cdot (\boldsymbol{\sigma}) \delta \Gamma}_{\text{condition de Neumann}} \end{aligned} \quad (3.49)$$

Le système global à résoudre pour l'ensemble des éléments du maillage est représenté figure 3.5, avec  $r_u^{front}$  et  $r_v^{front}$  respectivement les valeurs des réactions aux frontières suivant la direction de l'écoulement et sa normale :

Les lignes 1, 2 et 3 représentent les équations de continuité et de mouvement de Navier-Stokes dans le domaine fluide. Les lignes 4 et 5 représentent ces mêmes équations, lorsqu'elles sont calculées près des frontières, afin d'extraire les termes de réactions.



No. de ligne

1					
2					
3					
4				-I	
5					-I

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ p \\ r_u^{front} \\ r_v^{front} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

FIG. 3.5 Système global à résoudre

### 3.4.2.2 Méthode de Newton Raphson

On considère donc pour ce problème 5 inconnues formant le vecteur d'état suivant :  $\mathbf{U} = [u, v, p, r_u^{front}, r_v^{front}, \mathbf{F}^{front}]^T$ . Pour calculer ces variables, on dispose des équations présentées précédemment qui forment le système global. Celui-ci est donc de la forme  $\mathbf{R}(\mathbf{U}) = 0$ , sa résolution est implicite et l'on utilise pour cela la méthode de Newton Raphson. Cette méthode itérative consiste à étudier, à chaque itération, l'évolution de  $\mathbf{R}(\mathbf{U})$  en fonction de  $\mathbf{U}$  afin d'obtenir la correction de  $\delta\mathbf{U}$  nécessaire pour obtenir une meilleure approximation de la solution à l'équation. Pour cela, il faut évaluer la *matrice jacobienne*  $\mathbf{J}$  qui décrit la sensibilité des équations par rapport à chacune des inconnues pour déterminer les vecteurs de correction successifs  $\delta\mathbf{U}$  :

$$\overline{\mathbf{J}}(\mathbf{U}^n) \delta\mathbf{U}^n = -\mathbf{R}(\mathbf{U}^n) \quad (3.50)$$

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n + \delta\mathbf{U}^n \quad (3.51)$$

$$\text{où} \quad J_{ij} = \frac{\partial R_i(\mathbf{U}^n)}{\partial U_j}$$

On utilise l'approche du *jacobien numérique* qui approxime les dérivées par différences finies en perturbant la solution d'une petite quantité  $\delta$  :

$$J_{ij} = \frac{\partial R_i(\mathbf{U}^n)}{\partial U_j} = \frac{R_i(U_1^n, U_2^n, \dots, U_j^n + \delta, \dots, U_N^n) - R_i(\mathbf{U}^n)}{\delta} \quad (3.52)$$

Cette méthode donne une convergence quadratique de la solution et permet d'obtenir une très bonne approximation de la solution en peu d'itération. La figure 3.6 schématise l'approche numérique pour obtenir le zéro de la fonction  $\mathbf{R}(\mathbf{U})$ .

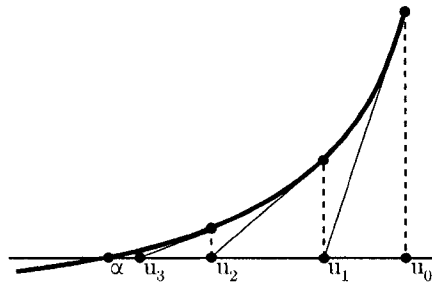


FIG. 3.6 Méthode de Newton

La méthode du *jacobien numérique* est utilisée aussi pour l'équation des sensibilités, seulement comme le système est linéaire, une seule itération suffit.

Il est important de noter que la méthode de Newton est couplée avec la méthode de factorisation fonctionnelle <sup>[39]</sup> et nous utilisons la méthode de résolution UMFPACK <sup>[11]</sup> pour le calcul du système matriciel global, ce qui diminue considérablement le temps de résolution du système global.

### 3.5 Maillage adaptatif

Comme nous l'avons vu, ce projet de maîtrise consiste à trouver numériquement des données qui sont habituellement trouvées expérimentalement. Il est important alors de suivre les différentes étapes qui nous permette d'être complètement sûr de nos résultats. Il s'agit alors de bien contrôler les erreurs. Deux sources d'erreurs sont responsables de l'écart possible entre les valeurs numériques et celles expérimentales : la modélisation mathématique du phénomène physique et sa résolution numérique. Roache <sup>[31]</sup> établit une méthode en deux étapes pour le contrôle de l'erreur : d'abord la vérification ensuite la validation. La première permettant de confirmer le bon fonctionnement du code numérique ainsi que sa bonne précision. La deuxième étant la confrontation des résultats numériques avec les valeurs expérimentales.

Nous nous intéressons ici à la vérification des simulations numériques. Pour faire cette vérification, nous utilisons la méthode adaptative qui, grâce un algorithme de contrôle de l'erreur numérique, permet d'obtenir un raffinement du maillage adaptée au problème traité. La figure 3.7 représente le schéma fonctionnel de cet algorithme.

Une fois les équations aux dérivées partielles pour l'écoulement et les sensibilités résolues, on utilise les résultats afin d'obtenir l'estimation d'erreur. Pour cela on utilise la méthode de projection locale par moindres carrés présentée par Zienkiewicz et Zhu <sup>[43, 44]</sup>. Cette méthode consiste à calculer, à partir des solutions numériques linéaires, une solution quadratique la plus proche possible de la fonction solution des équations aux dérivées partielles. On compare ensuite les deux solutions afin d'obtenir l'erreur numérique. La figure 3.8 illustre grossièrement la méthode.

La base de projection composée des éléments 1 et 2 donne ainsi une solution projetée qui permet d'obtenir l'erreur numérique. Si la norme de cette erreur est supérieure

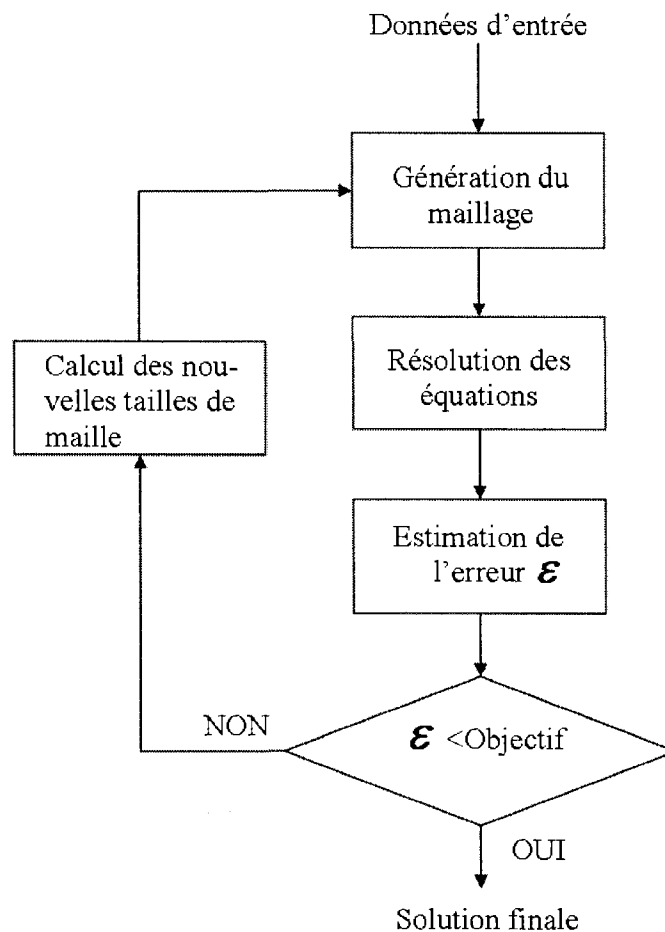


FIG. 3.7 Schéma fonctionnel de la méthode adaptative

à l'objectif fixé, on recalcule les nouvelles tailles de maille adéquate. Il est postulé que l'erreur et le taux de convergence asymptotique de l'élément fini sont reliés par la relation :

$$\|e\| = ch^\alpha \quad (3.53)$$

En comparant alors l'erreur cible avec l'erreur obtenu, il est possible d'obtenir la nouvelle taille de maille optimale pour la nouvelle résolution des équations. Plus ample précisions peuvent être trouvées dans la thèse de Eric Turgeon [39].

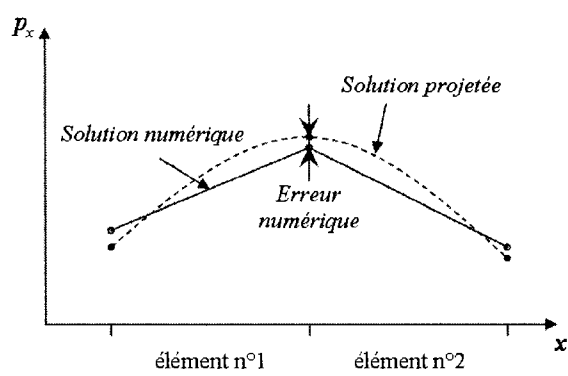


FIG. 3.8 Projection locale sur un élément

## CHAPITRE 4

### RÉSULTATS NUMÉRIQUES

Comme nous l'avons vu, la sensibilité d'une fonction  $\Phi$  par rapport à un paramètre  $a$  représente son taux de variation par rapport à  $a$ . Les sensibilités nous permettent ainsi d'évaluer les dérivées de stabilité requises pour l'analyse d'instabilité fluide-élastique. Les simulations numériques ont été faites sur le code numérique CADYF de Monsieur Dominique Pelletier, titulaire de la chaire de Recherche du Canada en caractérisation et optimisation d'écoulements complexes.

#### 4.1 Définition de l'étude

On étudie l'écoulement transverse à un faisceau de cylindre placés en configuration triangle tourné  $60^\circ$ . Le rapport pas sur diamètre  $P/D$  est égal à 1.5 comme le montre la Fig. 4.1.

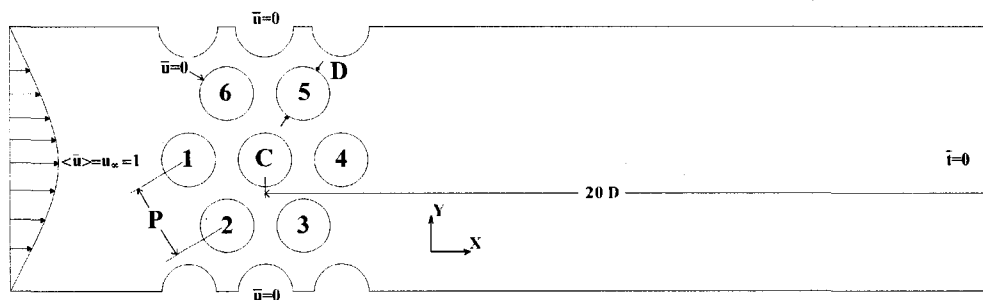


FIG. 4.1 Géométrie de la simulation numérique

Nous définissons le nombre de Reynolds avec la vitesse moyenne à l'entrée  $U_\infty$  et

le diamètre  $D$  des cylindres :

$$Re = \frac{\rho U_{\infty} D}{\mu} \quad (4.1)$$

L'analyse de stabilité fluide-élastique nécessite les dérivées de stabilité de cylindre de la figure 4.1 par rapport aux déplacements du cylindre central. Les paramètres  $a_i$  sont donc  $Y_C$  et  $X_C$  et les dérivées de stabilité sont  $\frac{\partial C_L}{\partial a_i}$  pour la portance et  $\frac{\partial C_D}{\partial a_i}$  pour la trainée.

Or, comme les coefficients de forces sont reliés aux forces :

$$C_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2}\rho U^2 D} \quad (4.2)$$

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho U^2 D} \quad (4.3)$$

nous nous intéressons ici aux sensibilités des forces  $F_D = F_x$  et  $F_L = F_y$ .

On sait d'après la littérature, qu'un écoulement autour d'un cylindre isolé devient très vite instationnaire lorsque le nombre de Reynolds augmente. Une première simulation fût faite pour un nombre de Reynolds de 40 et révéla l'apparition de phénomènes de *Jet Switching*. Le jet sortant de la configuration ne se comporte plus de façon symétrique changement de direction (vers le haut ou vers le bas) dans le temps, rendant le problème instationnaire. Notre première volonté étant d'obtenir des résultats pour un écoulement stationnaire, nous avons alors décidé de fixer le nombre de Reynolds à 20 afin d'éviter de tels effets.

Il est important de comprendre que CADYF calcule les équations de Navier-Stokes et les équations de sensibilités en supposant que l'utilisateur utilise un système consistant d'unités (MKS, CGS, sans dimension, ...). Ainsi, dans le cas des sensibilités, pour une perturbation  $\Delta a$  du paramètre  $a$ , le code numérique calculera les perturbations  $\Delta F$  des forces induites. Les équations de sensibilité étant linéaires,

une perturbation de  $2\Delta a$  donnera une perturbation de  $2\Delta F$ . On trouve ensuite les sensibilités des forces en calculant  $s_{\Phi}^a = \frac{\Delta F}{\Delta a}$ . Afin de simplifier les calculs, le calcul numérique a donc été défini avec des paramètres normalisés :

$$\rho_0 = 1 \quad ; \quad U_0 = 1 \quad ; \quad D_0 = 1 \quad ; \quad \mu_0 = 0.05 \quad ; \quad \Delta a = 1 \quad (4.4)$$

La valeur  $\Delta F$  donnée par CADYF se trouve donc être la sensibilité de la force  $F$  par rapport au paramètre  $a$ .

## 4.2 Résultats numériques

De nombreux essais ont été effectués afin de trouver la meilleure méthode pour calculer avec précision non seulement l'écoulement mais surtout les sensibilités des coefficients de forces. Cela nous a conduit à effectuer les simulations finales avec la méthode MIXTE en pression continue et un raffinement du maillage autour du cylindre contrôlé par l'utilisateur afin d'obtenir une meilleure précision des dérivées projetées aux frontières requises par le calcul des sensibilités.

### 4.2.1 Vérification des résultats

La vérification de la simulation se fait, comme vu, par le biais d'une méthode de maillage adaptatif. Afin d'obtenir ces coefficients de forces et sensibilités avec précision, 8 cycles d'adaptation ont été nécessaires pour un maillage final de 335045 noeuds et 164909 éléments.

Nous utilisons les normes énergie *EnergieU* et pression *L2P* pour mesurer la solu-



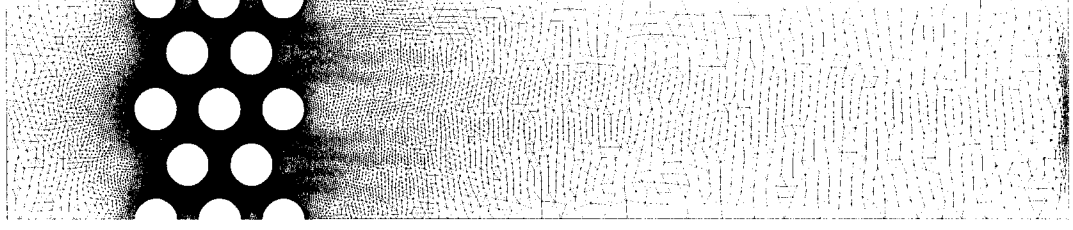


FIG. 4.2 Maillage final

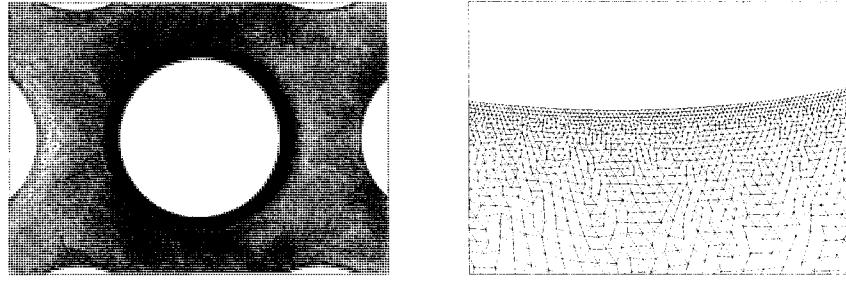


FIG. 4.3 Maillage autour du cylindre central

tion  $(u, p)$  et son erreur estimée  $(e_u, e_p)$  :

$$L2P \quad : \quad \|\mathbf{e}_p\|_{L_2}^2 = \int_{\Omega} (p^* - p_H)^2 d\Omega \quad (4.5)$$

$$EnergieU \quad : \quad \|\mathbf{e}_u\|_E^2 = \int_{\Omega} ((\epsilon^* - \epsilon_H) : (\epsilon^* - \epsilon_H)) d\Omega \quad (4.6)$$

$$\text{où} \quad \epsilon = \begin{pmatrix} 2\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & 2\frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Ici  $(p_H, \epsilon_H)$  sont les solution trouvées par éléments finis et  $(p^*, \epsilon^*)$ , les solutions

trouvées par la méthode des moindres carré. Les deux normes sont  $O(h^2)$ , où  $h$  est la taille de l'élément. La théorie prévoit donc que les erreurs ( $e_p, e_u$ ) évoluent quadratiquement. La pente de la droite  $\log(e)$  vs  $\log(h)$  doit donc être de 2.

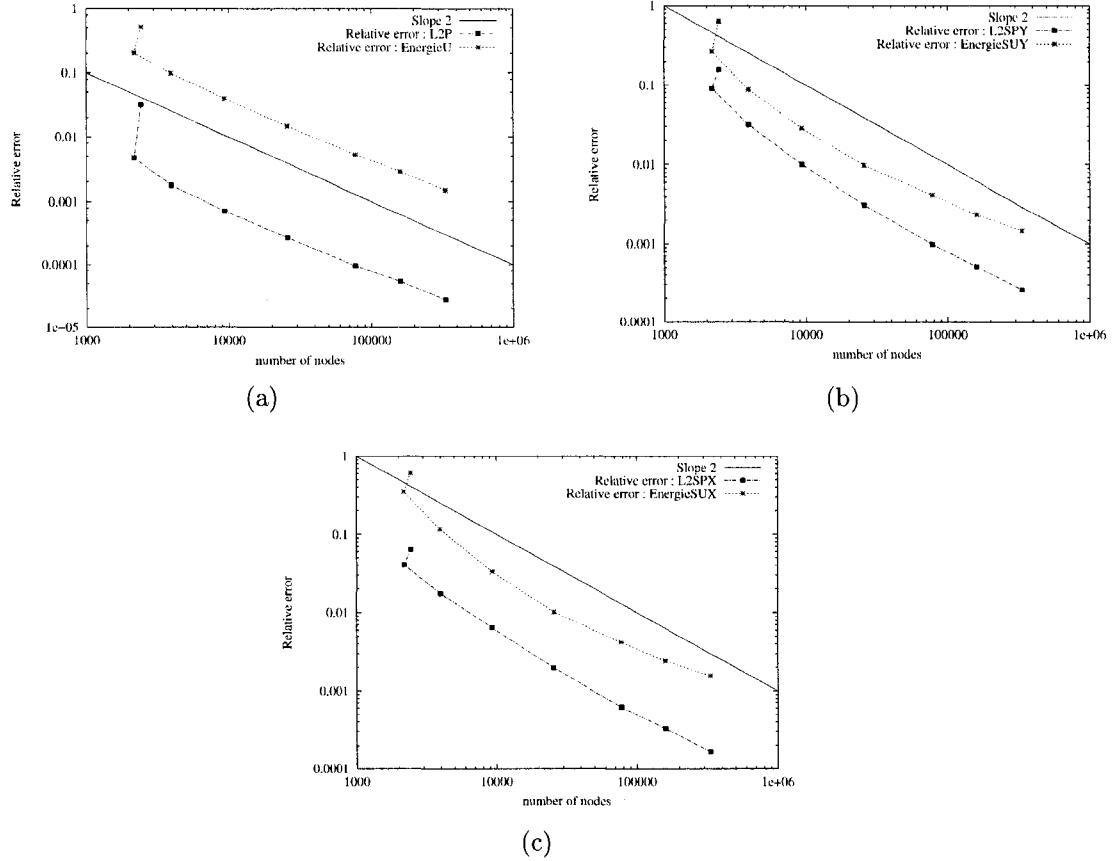


FIG. 4.4 Erreur relative  
(a) Écoulement (b) Sensibilité Y (c) Sensibilité X.

La convergence de la solution pour l'écoulement (Fig. 4.4) s'effectue suivant une pente très proche de la pente théorique pour l'écoulement. La solution pour les sensibilités converge moins rapidement, ce qui est compréhensible étant donné la complexité de la géométrie. La figure 4.5 montre la convergence selon le maillage des coefficients de force et de leurs sensibilités. Le maillage final donne une solution de l'écoulement très bien convergée, ce qui nous donne des valeurs sûres des forces et de leurs dérivées. Les forces  $F_D$ ,  $F_L$  sont convergées pour un maillage de

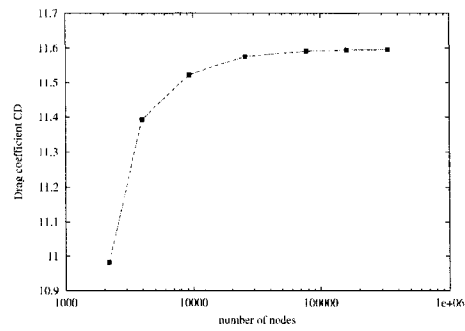
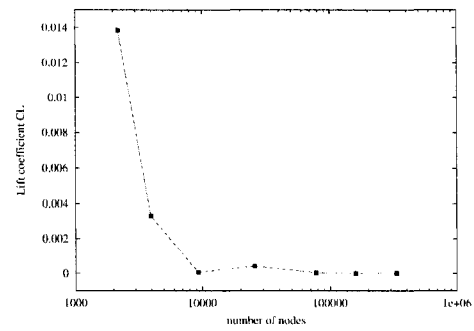
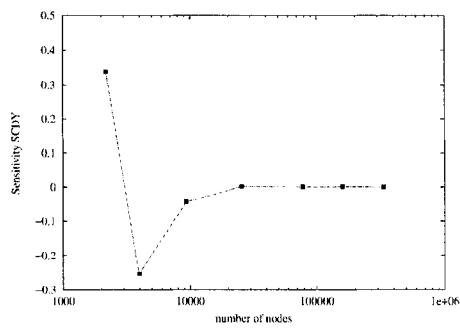
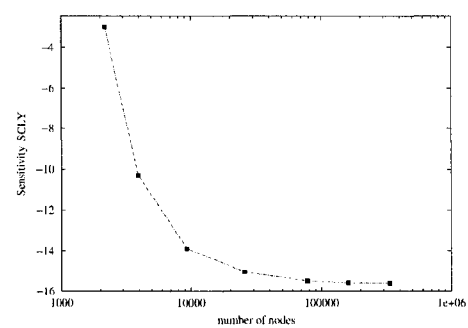
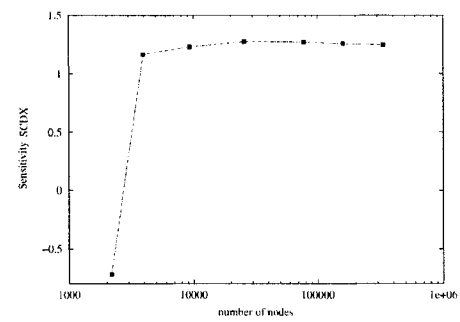
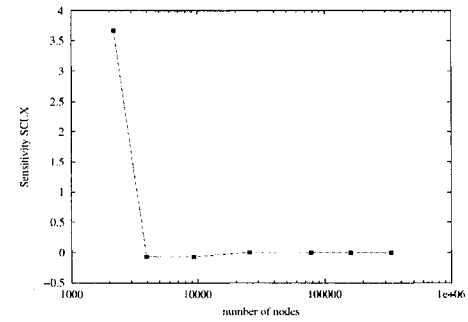
a)  $F_D$ b)  $F_L$ c)  $\frac{DF_D}{DY_C}$ d)  $\frac{DF_L}{DY_C}$ e)  $\frac{DF_D}{DX_C}$ f)  $\frac{DF_L}{DX_C}$ 

FIG. 4.5 Coefficients de forces et leurs sensibilités.

moins de 100000 noeuds.  $DF_L/DY_C$  et  $DF_D/DX_C$  nécessitent un maillage plus fin (raffinement autour du cylindre central) tandis que les sensibilités  $DF_D/DY_C$  et  $DF_L/DX_C$  sont convergées avec seulement 25000 noeuds. Nous voyons donc qu'après calcul de l'écoulement et des sensibilités sur le maillage final, la solution est vérifiée, au sens de Roache <sup>[31]</sup>, avec une erreur relative acceptable. Voyons maintenant les résultats des simulations numériques effectuées.

## 4.2.2 Résultats

### 4.2.2.1 Écoulement et sensibilité d'écoulement

On présente ici quelques figures de résultats pour le calcul de l'écoulement et des sensibilités. La figure 4.6 représente le champ de vitesse longitudinale  $u$  et la figure 4.7, le champ de pression  $P$  dans le faisceau de tubes.

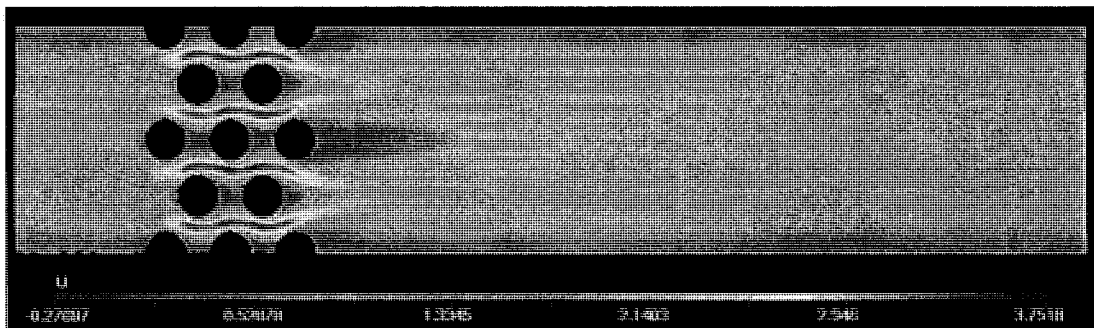


FIG. 4.6 Champ de vitesse longitudinal  $u$

La vitesse longitudinale  $u$  augmente d'un rapport 3 dans le faisceau de tube, ce à quoi nous nous attendions. On peut remarquer aussi que l'écoulement redevient quasi-développé après une distance d'environ 10 diamètres après la configuration de cylindre.

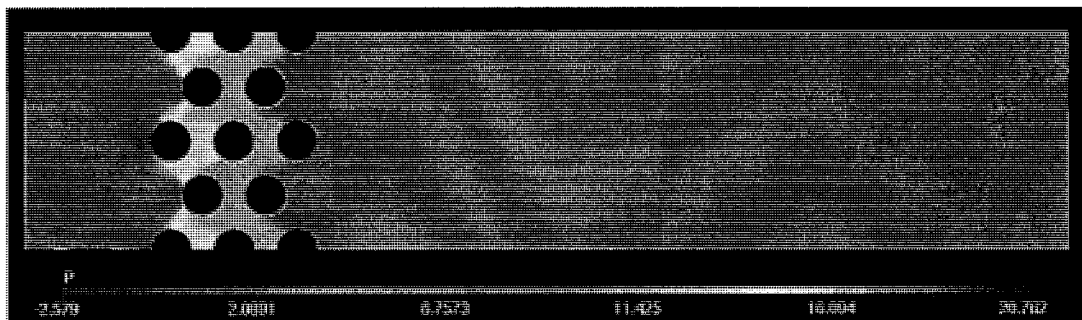


FIG. 4.7 Champ de pression  $P$

La pression du fluide à travers la configuration chute rapidement résultant en une perte de charge d'un rapport 20 entre la pression d'entrée et la pression de sortie.

Comme nous pouvons le voir chaque rangée de cylindre engendre une baisse brusque de la pression. On peut donc s'attendre d'hors et déjà à des valeurs importantes des forces de trainée.

L'étude sur les sensibilités d'écoulement est utile pour la compréhension de la réponse du système des perturbations des paramètres. Dans notre cas, il est intéressant de regarder la réaction du fluide lorsque le cylindre central se déplace. On étudie donc les différents champs de sensibilités de l'écoulement par rapport au paramètre  $X_C$  et  $Y_C$ . Il est cependant plus révélateur d'étudier cette réponse d'un point de vue relatif au cylindre central plutôt que d'un point de vue inertiel. Nous avons donc regardé les champs de sensibilité lagrangienne, c'est-à-dire :

$$\frac{Du}{Da} = \frac{\partial u}{\partial a} + \nabla u \cdot \frac{\partial \hat{X}}{\partial a} \quad (4.7)$$

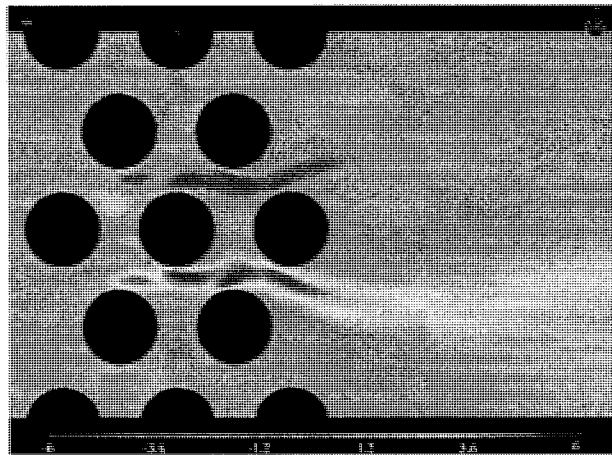


FIG. 4.8 Champ de sensibilité  $\frac{Du}{DY_C}$

La figure 4.8 montre le champ de sensibilité lagrangienne  $Du/DY_C$ . Ainsi lorsque le cylindre central se déplace vers le haut, l'obstruction qu'il engendre au dessus de lui empêche le fluide de passer, générant une baisse de vitesse ( $Du/DY_C < 0$ ), alors qu'au dessous du cylindre, le fluide a plus de place et donc accélère ( $Du/DY_C > 0$ )

afin de garder le débit constant. On peut voir aussi que l'influence du mouvement du cylindre s'étend assez loin derrière le faisceau.

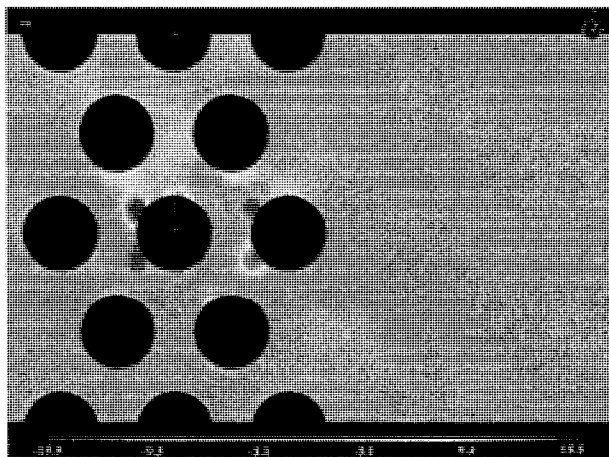


FIG. 4.9 Champ de sensibilité  $\frac{DP}{DY_C}$

Avec la figure 4.9, on remarque que les variations de pression les plus fortes se font autour des points d'arrêt et des points de décrochage du cylindre central et des cylindre environnants. L'influence du mouvement sur la pression reste localisée dans le faisceau de tubes, mais son étude est des plus importante pour la détermination des sensibilité de force comme nous le verrons dans la section suivante.

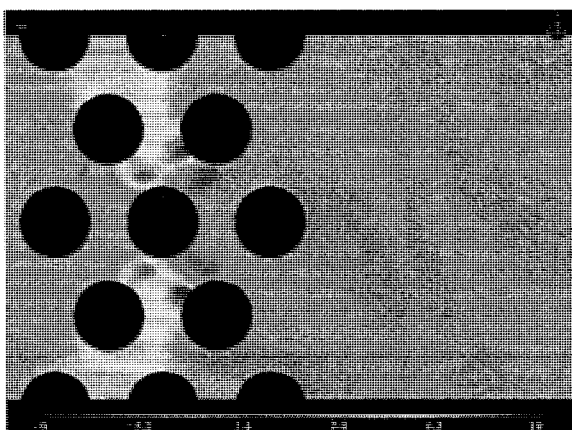


FIG. 4.10 Champ de sensibilité  $\frac{DP}{DX_C}$

D'après la figure 4.10, on voit que l'impact du déplacement  $X$ , du cylindre central

sur la pression est un peu plus faible mais plus étendu dans toute la configuration. Ainsi, la pression diminue de part et d'autre du cylindre central et augmente au dessus et au dessous de lui lorsque celui-ci se déplace vers la droite. Ce comportement peut s'expliquer par le phénomène d'aspiration qui se produit entre les tubes, ce que nous expliquerons plus en détails avec l'étude des forces induites et de leurs sensibilités.

#### 4.2.2.2 Coefficients de forces et sensibilités

Les forces numériques nous permettent de retrouver les coefficients de forces :

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho_0 U_0^2 D_0} = 2F_D \quad (4.8)$$

La relation est similaire pour le coefficient de portance.

Nous retrouvons les dérivées de stabilité par différentiation des coefficients de force par rapport à  $a = X_C$  ou  $a = Y_C$  :

$$\frac{\partial C_D}{\partial a} = \frac{1}{\frac{1}{2}\rho_0 U_0^2 D_0} \frac{\partial F_D}{\partial a} = 2s_{F_D}^a \quad (4.9)$$

La relation est similaire pour le coefficient de portance.

Il est important cependant, si l'on veut comparer ces sensibilités avec celle expérimentales, de les calculer par rapport aux paramètres adimensionnels  $\delta\tilde{X}_C = \frac{\delta X_C}{D_0}$  et  $\delta\tilde{Y}_C = \frac{\delta Y_C}{D_0}$  :

$$\frac{\partial C_D}{\partial \tilde{X}_C} = \frac{\partial C_D}{\partial X_C D_0} = \frac{\partial C_D}{\partial X_C} = 2s_{F_D}^{X_C} \quad (4.10)$$

La dérivée recherchée se trouve donc être deux fois la sensibilité donné par le calcul



numérique.

La table 4.1 présente les coefficients de forces pour tous les cylindres ainsi que leurs sensibilités en fonction du mouvement du cylindre central.

	$C_L$	$C_D$	$\frac{\partial C_L}{\partial Y_C}$	$\frac{\partial C_D}{\partial Y_C}$	$\frac{\partial C_L}{\partial X_C}$	$\frac{\partial C_D}{\partial X_C}$
<b>Cylindre C</b>	0.00	23.18	-31.20	0.00	0.00	2.50
<b>Cylindre 1</b>	0.00	16.96	0.16	0.00	0.00	10.20
<b>Cylindre 2</b>	-0.47	22.92	2.03	6.04	10.80	-13.47
<b>Cylindre 3</b>	0.00	23.96	5.06	0.05	-2.26	9.70
<b>Cylindre 4</b>	0.00	12.20	5.73	0.00	0.00	-5.68
<b>Cylindre 5</b>	0.00	23.96	5.06	-0.05	2.26	9.70
<b>Cylindre 6</b>	0.47	22.92	2.03	-6.04	-10.80	-13.47

TAB. 4.1 Forces et dérivées de stabilité des différents cylindres de la configuration en fonction des déplacement  $Y_C$  et  $X_C$  du cylindre central

On remarque tout de suite le caractère symétrique et anti-symétrique attendu de l'écoulement et de sa variation par rapport au mouvement du cylindre central : égalité des coefficients de traînée pour les couples de cylindre (2,6) et (3,5), même taux de variation ou signe opposé des taux de variation des coefficients de force pour ces même couples de cylindre. En raison de la symétrie de la configuration, les coefficients de portance sont tous nuls sauf sur les cylindres 2 et 6 pour lesquels ils ne sont pas complètement nuls. En effet la présence de murs rend l'écoulement localement asymétrique, on peut voir sur la fig. 4.11 que les iso-lignes pour la vitesse longitudinale autour des cylindres 2 et 6 sont sensiblement différentes, générant ainsi une force de portance. Cet effet est inexistant après la première rangée de cylindre car l'écoulement est alors devenu complètement symétrique.

On remarque aussi que les cylindres 1 et 4 ont des traînée plus faibles car ceux-ci subissent moins l'effet des cylindres avoisinants qui font dévier l'écoulement, la répartition de pression est alors plus uniforme autour de ces cylindres.

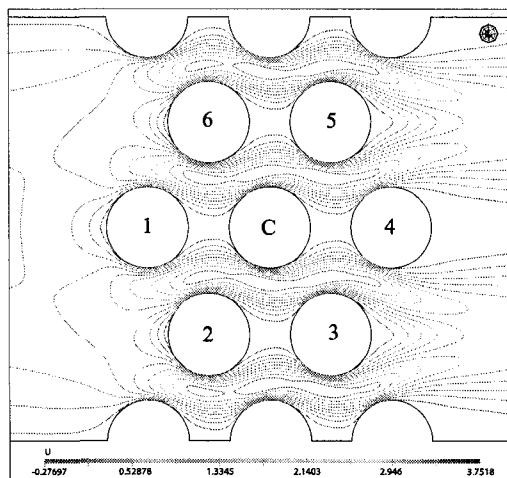


FIG. 4.11 Iso-lignes  $u$  dans le faisceau de cylindre

Quelques conclusions sur les sensibilité peuvent être tirées du tableau 4.1. La sensibilité  $\partial C_L / \partial Y_C$  nous montre que le coefficient de portance dépend fortement du déplacement transverse du cylindre central tendant à le ramener vers sa position d'équilibre. Seuls les cylindres 2 et 6 voient leur traînée influencée par le mouvement transversal du cylindre central, diminuant pour le cylindre 2 et augmentant pour le cylindre 6. Ce comportement provient d'un phénomène de blocage de l'écoulement en amont qui entraîne une diminution de la pression derrière le cylindre central (voir Fig. 4.12). Ce phénomène se manifeste en aval du cylindre central, n'affectant pas les cylindres 3 et 5.

Passons maintenant aux effets d'un déplacement longitudinal du cylindre central. La portance ne change pas pour un déplacement  $X_C$ . On retrouve le phénomène de blocage sur les cylindres 2 et 6. Le comportement des cylindres 1,  $C$  et 4 peut s'expliquer par un phénomène dit d'*aspiration*. Il est connu qu'une paire de cylindres alignés l'un derrière l'autre dans un écoulement uniforme voient leur traînée diminuer plus ils sont proches l'un l'autre. En effet le cylindre aval est aspiré dans le sillage du cylindre amont. Quant à lui le cylindre amont profite de l'augmentation de pression dans son dos générée par la présence du cylindre aval. Nous observons

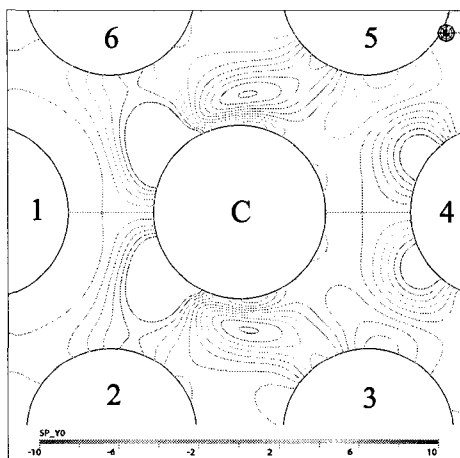


FIG. 4.12 Sensibilité de la pression en fonction de mouvement transversal du cylindre central

ce phénomène pour les couples de cylindre  $(1, C)$  et  $(C, 4)$ . Lorsque le cylindre  $C$  s'éloigne du cylindre 1, ce dernier voit donc sa trainée augmenter ( $\partial C_{D1}/\partial X_C > 0$ ). À côté de cela, lorsque le cylindre  $C$  se rapproche du cylindre 4, ce dernier voit donc sa trainée diminuer ( $\partial C_{D4}/\partial X_C < 0$ ). Le cylindre central subit donc deux forces qui se contrecarrent, l'augmentation de sa trainée due à l'éloignement du cylindre 1 mais en même temps la diminution de sa trainée du au rapprochement du cylindre 4. La force résultante peut se déduire en analysant le champ de sensibilité de la pression par rapport à  $X_C$ . La fig. 4.13 nous montre que l'augmentation de pression est plus grande à gauche qu'à droite, entraînant une augmentation de trainée. Celle-ci reste cependant faible par rapport à celles des autres cylindres.

Nous avons obtenu les différentes dérivées de stabilité grâce aux équations de sensibilité. Ce sont ces valeurs que nous voulons valider expérimentalement. Bien sûr, les équations de sensibilités permettent bien d'autre choses, comme la prédiction des écoulements pour des configurations voisines qui est présentée en annexe II.

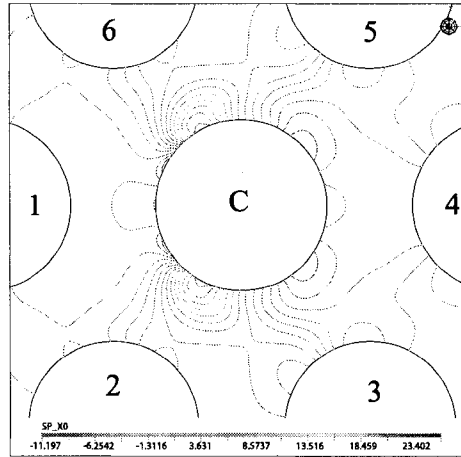


FIG. 4.13 Sensibilité de la pression en fonction de mouvement transversal du cylindre central

#### 4.3 Détermination du domaine d'instabilité d'une configuration de cylindre ultra-flexible

Ainsi la méthode des équations de sensibilité nous permet d'obtenir les différentes dérivées de stabilité nécessaires au calcul du domaine d'instabilité d'une configuration de tube. Il pourrait donc être intéressant d'aller déterminer ce domaine en utilisant nos résultats numériques. Les résultats relatifs à cette recherche sont exposé dans l'article écrit par Watteaux, Pelletier, Étienne et Mureithi <sup>[41]</sup>.

## CHAPITRE 5

### CONCEPTION DU MONTAGE ET MÉTHODES EXPÉRIMENTALES

Ce chapitre présente la conception et construction du montage expérimental ainsi que les différentes méthodes expérimentales qui nous ont permis d'obtenir les mesures de forces. Comme nous l'avons vu, il est important après vérification des résultats numériques de pouvoir les valider. Le montage expérimental nous permet de valider les résultats numériques trouvés pour le cylindre central de la configuration étudiée. Nous verrons tout d'abord la conception du montage expérimental, quels ont été en plus des facteurs influents, les contraintes et possibilités qui nous ont amené au montage final. Nous verrons ensuite brièvement la construction du montage. Finalement, au travers des contraintes et problèmes rencontrés, nous exposerons les méthodes expérimentales pour les différentes mesures nécessaires à la détermination des coefficients de forces et leurs dérivées.

#### 5.1 Conception du montage

Le système expérimental étant construit pour valider les résultats numériques, il est important qu'il reproduise les conditions de l'écoulement étudié. Le cahier des charges regroupe ces différentes conditions et expose aussi les contraintes de taille, budget et autre.

### 5.1.1 Cahier des charges

Le cahier des charges vise à définir exhaustivement les spécifications de base du produit que l'on cherche à obtenir. Il définit aussi les objectifs à atteindre et vise à bien structurer le projet afin de s'assurer que ce que nous construisons comporte bien toutes les spécifications recherchées.

#### (a) Présentation du projet :

Ce projet a pour but de valider, grâce à un montage expérimental, des valeurs de coefficients de force ainsi que leurs sensibilités calculées au préalable par simulation numérique. Le montage expérimental sera implémenté au sein du Laboratoire d'Interaction Fluide-Structure.

#### (b) Conditions techniques :

- Section d'essai : configuration triangle tourné  $60^\circ$  avec un rapport  $P/D = 1.5$
- Écoulement transverse à nombre de Reynolds de  $Re = 20$ .
- Mesure sur le cylindre central des forces de portance.
- Mesure sur le cylindre central des forces de traînée.
- Déplacement du cylindre central de -20% à 20% de son diamètre suivant la direction longitudinale et suivant la direction transversale.

#### (c) Conditions annexes :

- Taille et poids raisonnables de la section d'essai (pouvant être déplacée à bras d'Homme).
- Coût total du montage :  $< 10000\$$ .

Le cahier des charges écrit, nous définissons chacun des composants du système en fonction des conditions posées. Comme le choix d'un composant influence celui des autres, nous avons répertorié les différentes interdépendances à la fig. 5.1 pour choisir en toute connaissance de cause quel montage paraissait le meilleur.

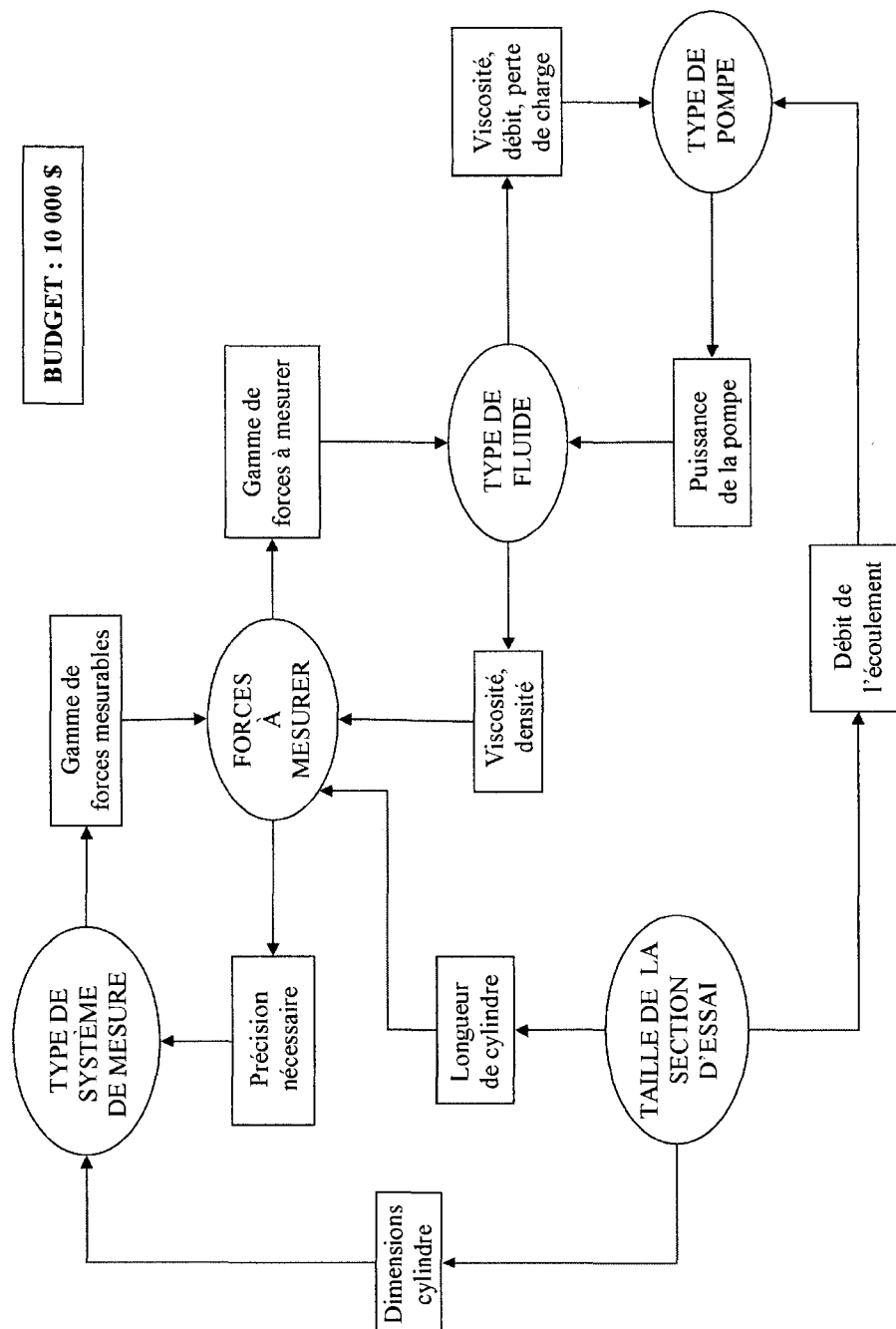


FIG. 5.1 Interdépendance dans la conception du montage.

Comme nous pouvons le voir sur le schéma, il est inévitable de devoir déterminer un composant de départ, à partir duquel on peut se référer pour choisir les autres. Celui-ci fût la section d'essai.

### 5.1.2 Conception de la section d'essai

La section d'essai doit représenter une configuration caractéristique de tubes en instabilité fluide-élastique. La conception de notre section d'essai s'est faite en se basant sur celle de la boucle principale du Laboratoire d'Interaction Fluide-Structure.

Le résultat est une section de 7 cylindres et 6 demi-cylindres tous de diamètre  $D_0 = 0.75$  po et de longueur  $L_0 = 3.700$  po. Le cylindre central se déplace grâce à deux guidages linéaires suivant les directions transversale et longitudinale à l'écoulement et c'est sur lui que l'on mesure les forces induites. Tous les plans techniques de la section ainsi que la nomenclature et la notice de calcul de résistance des matériaux sont inclus en annexe III. La figure 5.2 présente la section d'essai telle que construite.

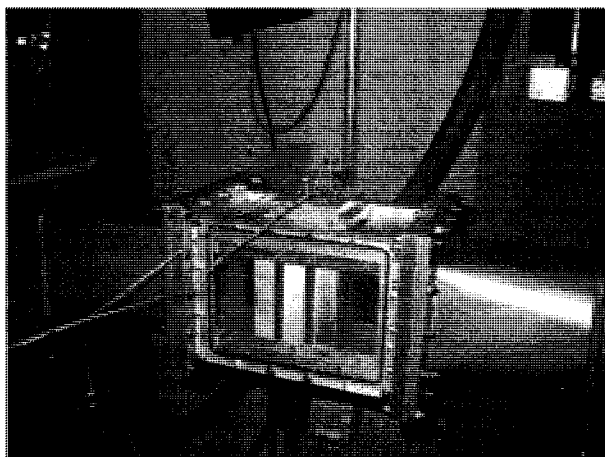


FIG. 5.2 Section d'essai et guidage linéaire.



### 5.1.3 Système de mesure

Pour mesurer la traînée et la portance du cylindre central, on utilise un système de mesure de 4 jauges de contraintes collées sur la partie poutre du cylindre flexible. La Fig. 5.3 montre les jauges et le montage avec le cylindre flexible.

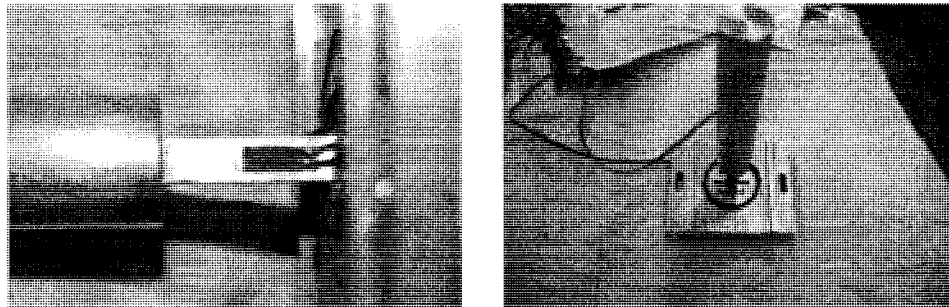


FIG. 5.3 Jauges et montage sur le cylindre

Le montage consiste en deux demi-ponts de Wheaston permettant d'obtenir simultanément les force de portance et de traînée. En effet, la déformation du cylindre entraîne une déformation de la jauge et donc une perturbation de sa résistance et c'est grâce à cette variation de résistance que nous pouvons quantifier la force induite. Il est donc important de protéger la jauge de tout élément qui pourrait nuire à la bonne mesure de la résistance. On procède donc à température constante. Les jauges étant immergées dans un liquide, il peut être donc judicieux de choisir un liquide non-conductif afin de ne pas avoir à protéger les jauges du liquide, comme fait dans la boucle principale. La très faible conductivité ( $\sigma = 6.410^{-2} S/m$ ) de la Glycérine en fait une parfaite candidate, d'autant plus qu'elle présente aussi d'autres avantages pour le système d'écoulement, comme nous le verrons ultérieurement.

Les jauges n'étant pas perturbées par la glycérine, la calibration a pu se faire à l'air libre. Le lecteur intéressé trouvera plus de détails à l'annexe III.

#### 5.1.4 Système d'écoulement

Comme notre étude s'intéresse à un écoulement laminaire à bas Reynolds ( $R_e = 20$ ), le choix du fluide pour les essais s'est avéré être un léger défi. L'eau, utilisé dans les autres boucles expérimentales du laboratoire, ne peut convenir. En effet, étant donné le diamètre des tubes et la viscosité de l'eau, la vitesse entrante, pour réaliser un nombre de Reynolds de  $R_e = 20$ , est si faible et les forces induites si petites qu'elles en rendent la mesure impossible. Par contre, la glycérine s'avère un fluide intéressant. En effet, sa viscosité, presque mille fois supérieure à celle de l'eau, résulte en une vitesse et des forces faciles à mesurer. De plus sa non-toxicité, comparée à celle d'huiles lourdes, simplifie son usage. Finalement, sa solubilité dans l'eau permet de contrôler sa viscosité aisément.

Cependant, dans notre cas, la vitesse d'entrée de la glycérine ( $\rho \approx 1260 \text{ kg/m}^3$  et  $\mu \approx 1 \text{ Nm}^{-2}\text{s}$ ) dans la section d'essai (3.9 po x 3.9 po) doit être de 0.85 m/sec, soit un débit de 8.35 l/sec pour que le nombre de Reynolds soit égal à 20. Ce débit élevé et l'importance de la viscosité de la glycérine nécessitent l'usage d'une pompe très puissante dont le coût dépasse de beaucoup notre budget. Nous avons alors décidé d'utiliser la force de gravité pour générer la vitesse d'entrée nécessaire. Il nous reste donc à vérifier qu'une colonne de glycérine répond aux conditions du cahier des charges.

##### 5.1.4.1 Calcul théorique de la vitesse d'écoulement dans la section

Un calcul d'hydraulique instationnaire est nécessaire pour vérifier le bien fondé de cette stratégie expérimentale. Le montage, présenté à la fig. 5.4, est composé de deux réservoirs, l'un suspendu pour créer la colonne de glycérine, engendrant l'écoulement, et l'autre au sol pour recevoir la glycérine.

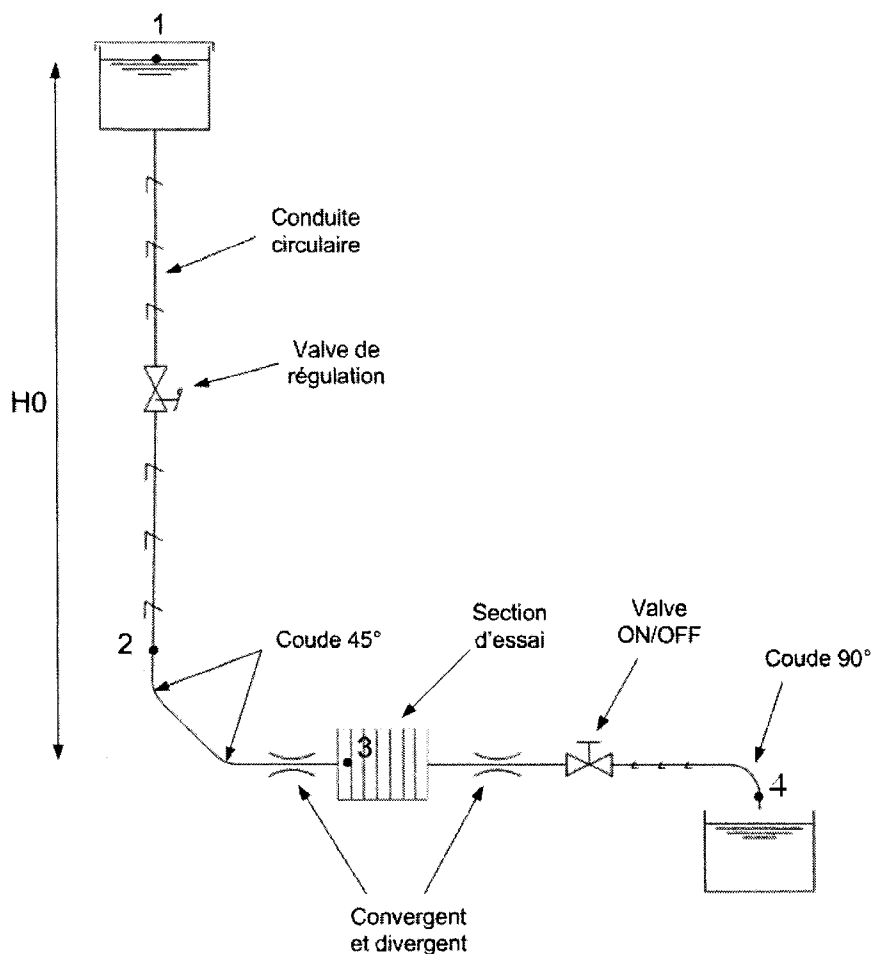


FIG. 5.4 Schéma hydraulique du montage expérimental.

L'écoulement étant laminaire et incompressible, on peut utiliser alors les équations de Bernoulli généralisées entre les points 1 et 4 pour obtenir la vitesse en entrée de la section d'essai (calculs exposés en annexe III).

Il s'agit d'un calcul clé pour le dimensionnement du montage, en effet il nous fallait trouver un montage qui permette d'obtenir un nombre de Reynolds aux alentours de 20 tout en maintenant un débit le plus constant possible pour une durée de temps suffisante pour effectuer les mesures. La fig. III.4 montre l'évolution de la vitesse d'entrée.

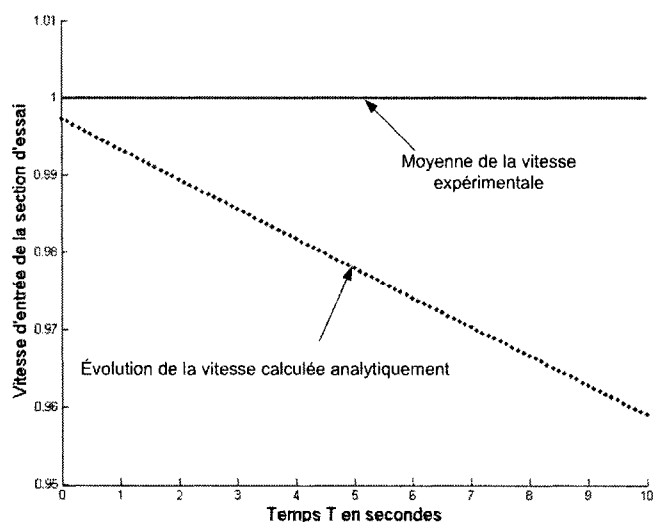


FIG. 5.5 Vitesse analytique dans la section d'essai.

On voit donc que sur un intervalle de quelques secondes, la vitesse d'entrée calculée analytiquement change peu. Cette variation entrant dans la plage de précision d'un débitmètre, cette approche est donc le meilleur compromis que nous puissions trouver. La vitesse moyenne réelle observée fût un peu élevée que celle analytique.

## 5.2 Construction du montage

La figure 5.6 représente le montage réel une fois assemblé. Le montage est constitué d'une tuyauterie de diamètre  $D = 4$  po, alimentant la section d'essai, et d'une tuyauterie  $D = 1$  po connectée à une pompe pour transférer la glycérine dans le réservoir du haut.

Un divergent et un convergent assurent la transition d'une section circulaire à une section carrée sont placés en amont et aval de la section d'essai. Le divergent placé en amont mesure 20 po de long afin de s'assurer que l'écoulement soit le plus développé possible lorsqu'il arrive dans la section d'essai. Pour un faible nombre de

Reynolds, la condition d'écoulement développé est  $L/D = 1.2$  dans une conduite circulaire, ce qui donne une longueur  $L$  de 4.8 po. Nous sommes donc bien en dessus de la longueur minimum et pouvons donc postuler malgré le changement de section que l'écoulement obtenu est proche d'un écoulement développé.

### **5.3 Conclusions sur la conception et construction du système expérimental**

Tout le processus de conception, d'achat des pièces et de construction s'est fait sur une période d'un an, la période d'attente de livraison des pièces ayant été la plus longue. De façon général, le résultat est satisfaisant. La seule condition non respectée du cahier des charges fût la plage de déplacement du cylindre en raison de la présence non-prévue de fils électriques près des jauges de contrainte et venant empêcher le cylindre de trop s'éloigner. Nous pouvons cependant le déplacer de  $-16\%$  à  $+16\%$  de son diamètre ce qui est amplement suffisant pour obtenir les dérivées de stabilité. La construction a nécessité un budget d'environ 11000 dollars de matériel, ce qui s'approche du budget prévu initialement. Il pourrait cependant être utile d'améliorer le système de positionnement et de mesure de la température pour de prochaines mesures, ce qui permettrait, comme nous le verrons plus tard, de réduire encore plus l'incertitude des mesures. Une fois le système prêt, il a fallu mettre en place les différentes méthodes expérimentales nécessaires à la bonne mesure des forces.

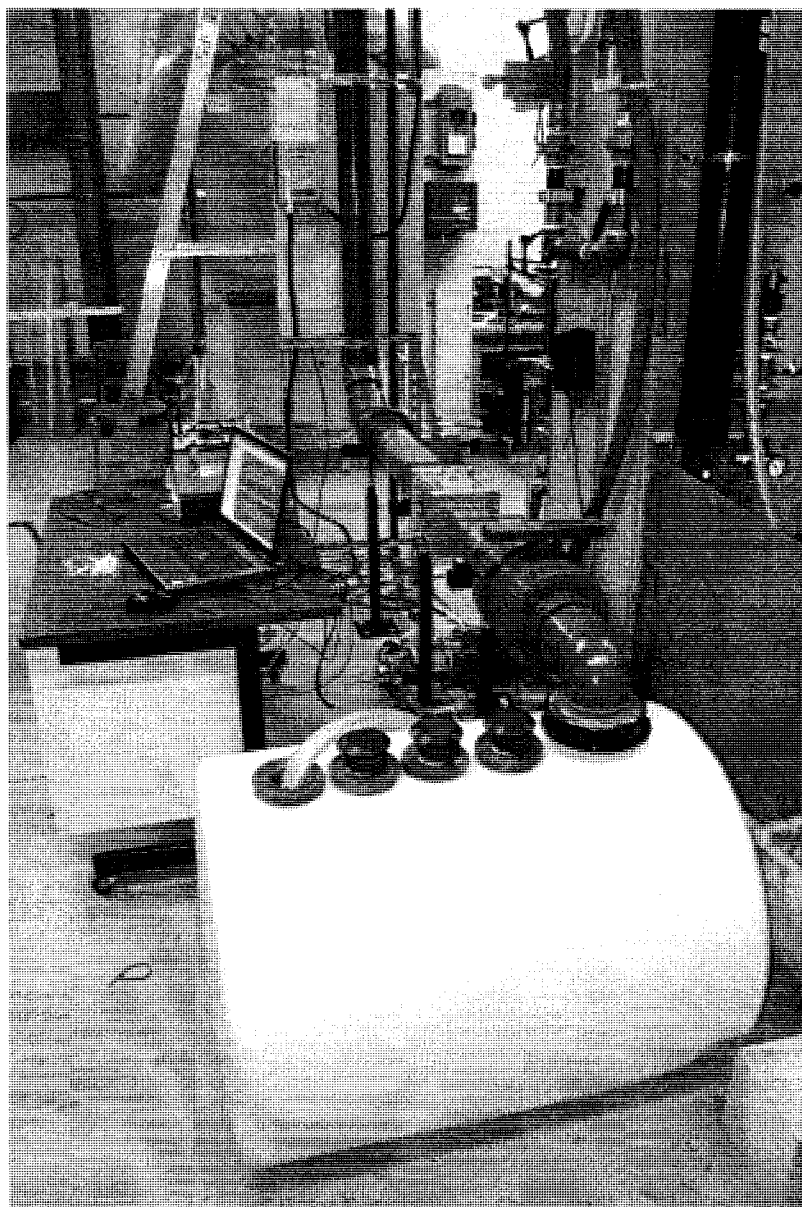


FIG. 5.6 Montage expérimental construit au sein du laboratoire.

## 5.4 Méthodes expérimentales

### 5.4.1 Précautions de mesure expérimentale

Une fois le montage expérimental construit, de nombreux tests ont été faits pour vérifier le bon fonctionnement du système, et déterminer les paramètres (et leur comportement) qui influencent la réponse du système.

Plusieurs problèmes liés à la température sont apparus, nous forçant à prendre certaines précautions pour éviter des pertes de précisions causées par des variations de température. Le premier problème vient de l'échauffement de la glycérine causé par son passage dans la pompe. De plus, les forces de friction internes, générées lors de l'écoulement, contribuent aussi à une hausse de la température. Il semble donc difficile voir impossible de maintenir une température constante sur de longue période d'essai car nous n'avons aucun système de régulation de la température (échangeur de chaleur). Cette augmentation de température entraîne une diminution de la viscosité qui induit à son tour une augmentation de la vitesse de l'écoulement, ces deux effets contribuant à l'augmentation du nombre de Reynolds. Ainsi, il s'en suit que plus l'on va vouloir faire de mesures pour être précis moins on va l'être. Certaines précautions s'impose donc durant la procédure de mesures que nous verrons plus tard.

Un autre problème de précision est celui du bruit présent dans les signaux électriques mesurés. Les variations de tension générées par les déformations de jauges sont mesurées avec le système d'acquisition PIMENTO 6.0, or du bruit, dont l'amplitude varie dans le temps, apparaît lors de la prise du mesure. La raison de ceci étant du au bruit récupéré par les fils électriques (signaux électromagnétiques environnants) et au convertisseur analogique-numérique de PIMENTO. Alors que le bruit est négligeable pour la mesure de la trainée, celui ci devient important pour la

portance car celle-ci est très faible. Afin de s'assurer d'obtenir des valeurs correctes des taux de variations, nous avons pris des mesures pour les géométries avec le cylindre central à son origine  $0\%D$ , puis déplacé de  $4\%D$  et  $8\%D$  suivant les deux directions  $X$  et  $Y$ . La position  $8\%D$  donnant des forces plus élevées, le bruit est alors plus négligeable.

La trainée varie très peu en fonction de  $X$ , on prend donc la même gamme de déplacement que pour la portance afin de pouvoir calculer une bonne dérivée.

Il ne reste plus qu'à mettre en place une procédure expérimentale systématique qui nous permette de minimiser le plus possible les incertitudes.

#### 5.4.2 Méthode de mesure de la vitesse réelle

Un calcul par traitement d'image nous permet de mesurer la vitesse. Une fois la valve ouverte, l'écoulement fait baisser le niveau du glycerine dans le réservoir du haut. En filmant la descente de la glycerine dans le réservoir puis en transformant la vidéo en séquence d'image, on peut donc déduire la vitesse d'écoulement expérimental. Pour cela on procède de la façon suivante :

- En ajustant l'éclairage, on crée un contraste dans le réservoir entre la glycerine qui est claire et l'air qui est sombre.
- On transforme la vidéo en une série d'images noir et blanc.
- On transforme les images en matrices, les couleurs sont alors symbolisées par des entier compris entre 0 et 256, 0 étant une teinte très sombre et 256 une teinte très claire. L'interface air-glycerine est représenté par un passage rapide de sombre (air) à clair (glycerine), ce qui se traduit dans la matrice en un passage d'un petit entier à un grand entier.



- Comme le niveau de glycérine diminue avec le temps, l'interface air-glycérine descend dans l'image et donc dans la matrice.
- Il suffit alors de récupérer la position sur chaque image de l'interface et d'obtenir ainsi le déplacement de celle-ci en fonction du temps.
- Une approximation par la méthode des moindres carrés nous donne alors une droite de déplacement.
- On récupère le rapport pixel/distance.
- La dérivée fournit la vitesse moyenne.

On trouvera plus de détails en annexe III.

Nous avons tenter d'utiliser des régressions non-linéaires, résultant des équations de Bernoulli , mais l'imperfection due aux pixels de l'image fit échouer un bon nombre de fois notre tentative. La première procédure décrite, appliquée sur un intervalle de temps suffisant s'avère donc être notre meilleur choix. La vitesse est calculée pour chaque répétition de l'expérience.

#### 5.4.3 Positionnement du cylindre flexible

Le positionnement du cylindre se fait à l'aide d'un étalon de mesure fixé le long du support de guidage et servant de calle pour placer le cylindre (voir fig. 5.7).

Les étalons ont été usinés pour placer le cylindre à la position  $+0\%D$ ,  $+4\%D$  et  $+8\%D$  dans les directions  $X$  et  $Y$ . On obtient les positions opposées (  $-0\%D$ ,  $-4\%D$  et  $-8\%D$  ) en plaçant l'étalon de l'autre côté du guidage linéaire. Bien sûr, suivant les côtes nominales les positions  $+0\%D$  et  $-0\%D$  doivent placer le cylindre au même endroit. Ce n'est malheureusement pas le cas en raison du tolérancement d'usinage (  $\pm 0.005$  pouce) qui introduit une incertitude de positionnement. Nous avons donc 6 positions différentes  $\pm 0\%D$ ,  $\pm 4\%D$  et  $\pm 8\%D$  entachée d'imprécisions

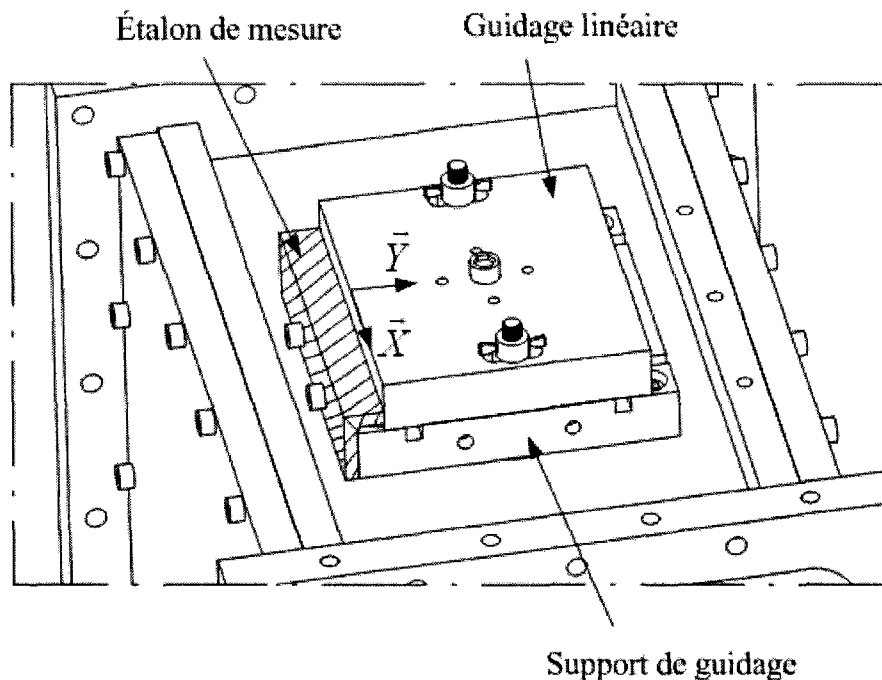


FIG. 5.7 Étalon de mesure pour le système de guidage

qui nuisent à la mesure des dérivées de stabilité.

On peut réduire cette incertitude de deux façons :

- Trouver quelle position nous pouvons considérer comme point central servant de référence pour le déplacement suivant  $X$  et faire de même suivant  $Y$ .
- Mesurer précisément les côtes des étalons mesures pour connaître les déplacements d'un étalon à l'autre.

Pour la direction  $Y$ , nous fixons la position du point d'origine là où la portance mesurée est la plus faible soit  $Y + 0\%D$ . Pour la direction  $X$ , l'évolution de la trainée en fonction de  $X$  nous a amené à conclure que la position  $X + 0\%D$  était la plus proche du centre réel. Ensuite la mesure précise ( au millième de pouce près grâce à un pied à coulisse) du guidage, du support de guidage et des étalons de mesure, nous a permis de récupérer la distance de chaque position l'une par rapport à l'autre. Le support de guidage n'étant pas réellement carré, le positionnement avec les étalons

est différent suivant les directions  $X$  et  $Y$ . La table 5.4.3 donne les positionnements réels, du cylindre central par rapport au centre réel de la configuration.

Direction	$-8\%D$	$-4\%D$	$+0\%D$	$-0\%D$	$+4\%D$	$+8\%D$
X en %	-6.93	-3.20	0.00	0.66	3.86	7.59
Y en %	-6.53	-2.80	0.00	1.06	3.86	7.59

TAB. 5.1 Positions réelles du cylindre central

On remarque que les positions  $Y - 0\%D$  et  $X - 0\%D$  sont en fait après le centre réel ( $Y + 0\%D$  et  $X + 0\%D$ ) et non avant. Nous constatons aussi que les tolérances d'usinage, même si elles sont petites, causent des écarts importants entre les positions nominales et réelles du cylindre central. Pour des raisons de facilité d'écriture nous gardons le symbolisme 0, 4, 8%.

#### 5.4.4 Comportement de la force

Tel que mentionné précédemment, la vitesse d'entrée dans la section diminue avec le temps. En effet, à cause de la diminution de la hauteur de la colonne de glycérine, la pression générée par l'écoulement s'affaiblit, entraînant une diminution temporelle de la force mesurée. La figure 5.8 montre cette évolution.

D'après le calcul analytique exposé plus tôt, la vitesse d'entrée est solution d'une équation quadratique avec la variable temps dans le terme "constant" de l'équation. La vitesse se comporte donc comme  $\sqrt{t}$ . La force étant proportionnelle à la vitesse au carré, elle est donc une fonction linéaire du temps, ce qui est exactement ce que nous observons sur la figure 5.8. Nous n'avons comme seul recours que d'utiliser la valeur moyenne de la force mesurée, tout comme pour la mesure de la vitesse.

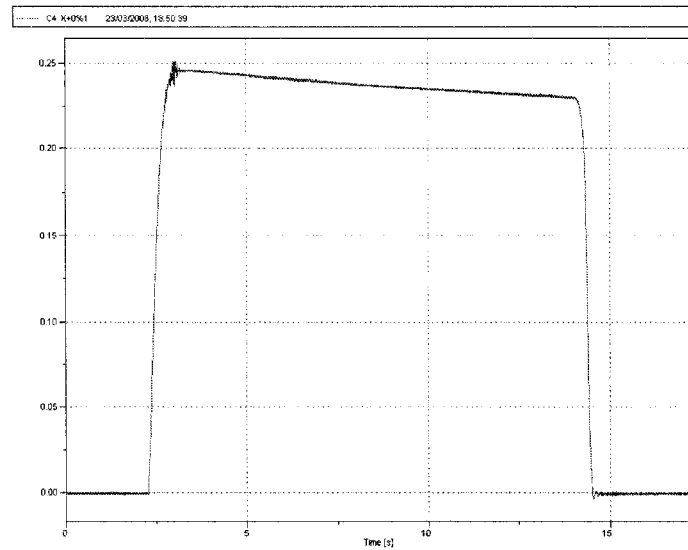


FIG. 5.8 Comportement de la force

#### 5.4.5 Lissage des mesures de force

Comme nous l'avons vu, le signal récupéré par Pimento contient du bruit qui provient de différents facteurs environnants. La réponse est donc entaché d'oscillations à très haute fréquence (voir Fig. 5.9).

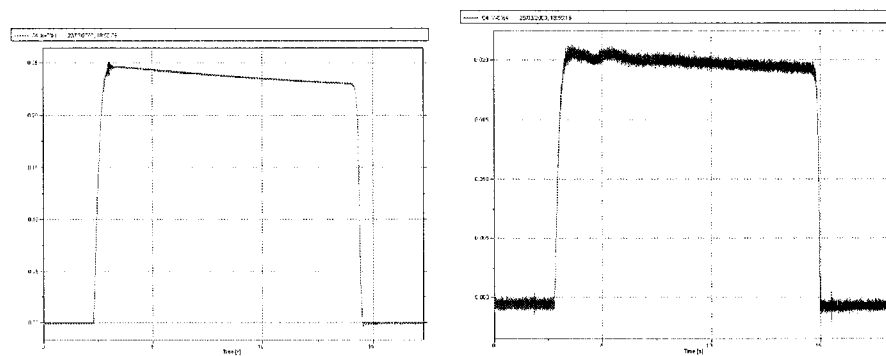


FIG. 5.9 Mesures expérimentales brutes.

Afin de minimiser le plus possible le rôle du bruit dans le calcul des forces induites,

nous lissons la courbe d'évolution en faisant une moyenne rms locale coulisant le long de la courbe, puis annulant l'OFFSET du signal présent durant la mesure. Le signal lissé est donc nul lorsqu'aucune force n'est subit par le cylindre (voir Fig.5.10).

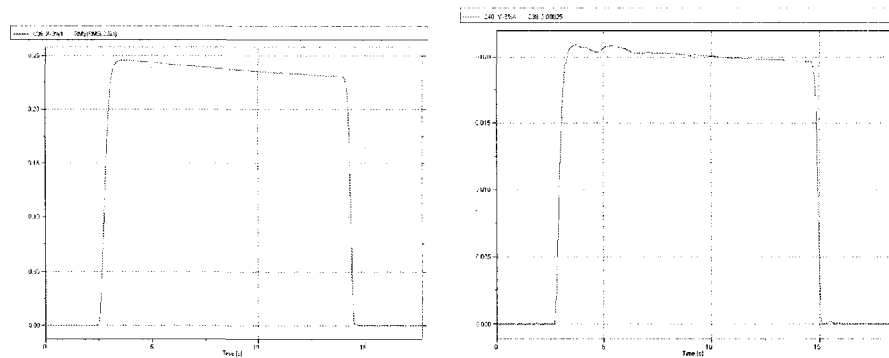


FIG. 5.10 Mesure expérimentales lissées.

Ces courbes sont ensuite utilisée pour calculer les forces induites.

#### 5.4.6 Procédure expérimentale

Du fait de la variation temporelle de la force, il était important de trouver une procédure expérimentale systématique qui permette d'obtenir une bonne répétabilité des mesures. Nous calculons la moyenne de la force prise sur 5 secondes à partir du moment où la glycérine dépasse la deuxième graduation du réservoir. Nous synchronisons la prise de mesure de la force avec la vidéo en prenant comme référence temporelle l'instant d'ouverture de la vanne (qui correspond au début de la descente de la glycérine et donc à l'augmentation soudaine de la force). La fig. 5.11 présente le lien entre la vitesse et la force.

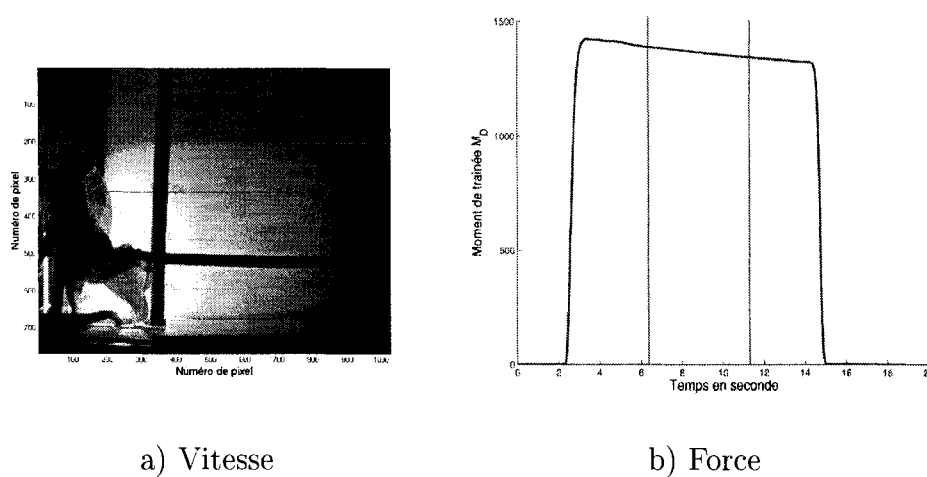


FIG. 5.11 Mesure de la vitesse et du moment.

Pour une série de mesure, la procédure systématique est :

- Régler la vanne de régulation pour la vitesse voulue.
- Placer le cylindre flexible à la position  $-8\%D$ .
- Remplir le réservoir du haut en fermant la vanne ON/OFF.
- Lancer la vidéo.
- Lancer l'acquisition de mesure.
- Ouvrir la vanne ON/OFF.
- Fermer la vanne ON/OFF une fois le niveau de glycérine en dessous de la deuxième graduation.
- Arrêter la vidéo et l'acquisition de mesure.
- Lisser les courbes d'évolution.
- Faire la conversion en Newton.
- Calculer la force moyenne lorsque le niveau de glycérine se situe entre les deux premières graduations.
- Desserrer un peu les vis papillons et utiliser les étalons de mesure pour déplacer le cylindre flexible à la position  $-4\%D$  en le laissant immergé dans la glycérine.

- Répéter la procédure jusqu'à la position  $8\%D$ .

La possibilité de déplacer le cylindre sans devoir vider complètement le réservoir du haut, augmente de façon conséquente la précision des mesures. En effet, en évitant à la glycérine de faire un cycle complet au travers de la pompe pour chaque position du cylindre flexible, on diminue de beaucoup l'écart de température, et on maintient donc une stabilité quasi-parfaite de la viscosité. La procédure expérimentale étant mise en place, il ne nous reste plus qu'à vérifier la répétabilité des mesures.

#### 5.4.7 Répétabilité des mesures

Il est important pour tout système expérimental de vérifier la répétabilité des mesures faites. Pour cela, nous procédons en deux étapes :

- 1- Vérifier la bonne répétabilité des mesures en ne manipulant rien entre chaque essai de mesure.
- 2- Vérifier la bonne répétabilité des mesures en manipulant le système expérimental entre les mesures (ce qui revient à bouger le cylindre central et le remettre à sa place).

La première étape permet ainsi de vérifier la bonne stabilité des paramètres de l'écoulement d'un essai à l'autre : densité, viscosité, vitesse d'entrée. La deuxième permet de confirmer la stabilité du système mécanique lui-même : bon placement des cylindres d'une manipulation à l'autre. Ces deux répétabilités ont été vérifiées pour les mesures de la portance et trainée. La deuxième étape est bien sûr moins bonne que la première étant donné que nous venons perturber le système de placement de cylindre. La variation des mesures reste cependant raisonnable (voir fig 5.12 ).

Une fois cette étape complétée, il nous reste à effectuer notre campagne de mesures proprement dites. Pour cela, nous avons mesuré les forces de portance et de trainée

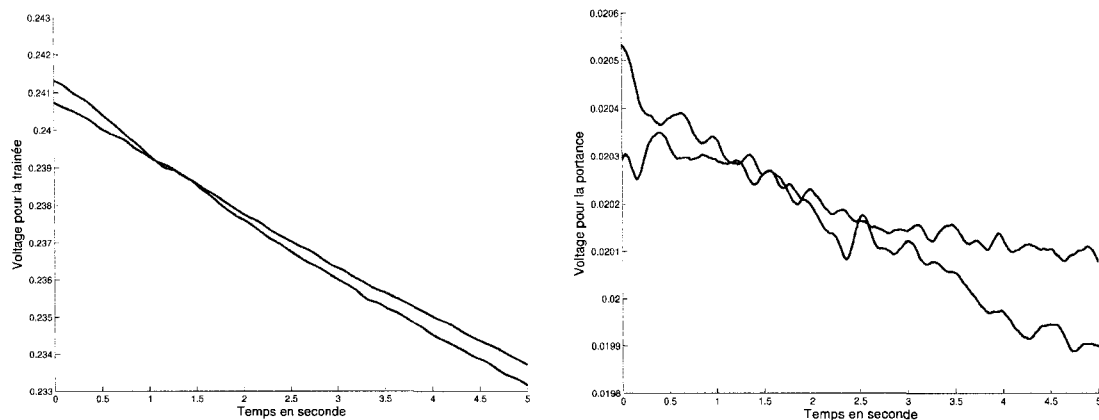


FIG. 5.12 Répétabilité des moments

que subit le cylindre en faisant varier sa position de  $Y_C = -8\%D$  à  $Y_C = +8\%D$  puis de  $X_C = -8\%D$  à  $X_C = +8\%D$ . Afin de s'assurer une dernière fois des répétabilités et de la qualité des mesures, nous avons fait trois séries de mesures.



## CHAPITRE 6

### RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX ET COMPARAISON

Ce chapitre présente les résultats expérimentaux et leurs comparaisons avec le modèle numérique. Nous faisons en premier lieu une comparaison préliminaire, avec les prédictions numériques, qui s'avère décevante. Nous exposerons ensuite la réflexion qui nous a amené à reprendre certains calculs pour améliorer notre modèle théorique et comparer les bonnes choses. Nous finissons par la validation finale des résultats numériques.

#### 6.1 Premiers résultats et comparaisons avec le modèle 2-D

Une fois les premières mesures effectuées, nous avons confronté les valeurs expérimentales et numériques. La vitesse choisie fût de  $0.8m/sec$ , la viscosité de la glycérine étant de  $0.85Nm_{-2}s$ , sa masse volumique de  $1243kg/m$  et le nombre de Reynolds nominal de  $Re = 22.28$ . Le résultat fût décevant. La valeur de la force de traînée trouvée expérimentalement était de  $F_{Dexp} = 13.50N$  alors que le calcul numérique nous donnait une force de traînée de  $F_{Dnum} = 1/2\rho_{exp}D_{exp}V_{exp}^2LC_D = 16.50N$  soit un écart de 18% de la valeur numérique par rapport à l'expérience.

Cette différence importante entre les valeurs expérimentales et numériques nous a amené à reconsidérer ce qu'il se passait réellement au niveau de l'écoulement. En effet, comme nous l'avons exposé plus tôt, un divergent en amont de la section d'essai assure la transition entre la section ronde et celle carrée de la conduite. Sa longueur a été choisie afin d'obtenir un écoulement le plus développé possible. Cet écoulement est donc non-uniforme dans les deux directions de la section d'essai alors

que nous considérons numériquement un écoulement constant suivant la hauteur de la section d'essai (voir Fig. 6.1), une observation dont on doit finalement absolument tenir compte étant donné la faible valeur du nombre de Reynolds.

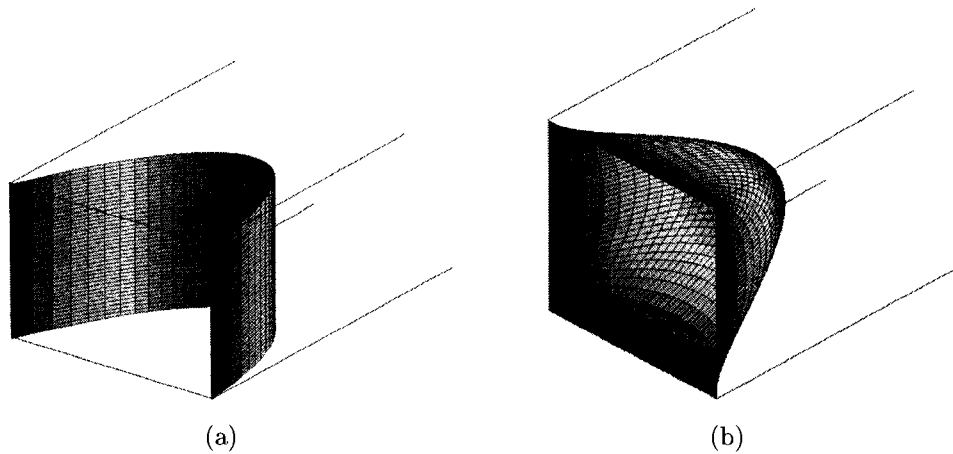


FIG. 6.1 Profil de vitesse  
(a) Simulation numérique (b) Réel

Par rapport au profil de vitesse réel, la simulation numérique représente donc l'étude du profil 2-D dans le plan central du profil 3-D. Il devient donc évident que l'écoulement 2-D est une bonne représentation de ce qu'il se passe dans son plan mais une mauvaise approximation dans les autres plans, générant une surestimation de la force mesurée. La calibration des jauges joue aussi un rôle important. Elle a été faite en posant des cylindres creux d'un poids précis sur le cylindre flexible pour voir la réponse des jauges de contrainte. Cette procédure de calibration nous donne donc la réponse de la jauge à une force uniforme le long du cylindre, or la force générée par le fluide n'est pas uniforme dans notre montage. Un calibrage en prenant en considération non pas la force mais le moment semble donc plus judicieux. En effet, le voltage mesuré est généré par la déformation de la jauge de contrainte et nous sommes ici dans une configuration de cylindre flexible fixé en porte-à-faux, on caractérise alors la déformation de jauge non pas par la force mais par le moment subit par le cylindre. Le voltage évolue donc proportionnellement

au moment :  $M = \alpha V$ , la pente de la droite  $M(V)$  est donc  $\alpha$  et reste constante quelque soit la longueur  $L$  où nous faisons notre calibration. Ces nouvelles considérations nous ont amené à reconsidérer le calcul numérique. Il nous faut calculer l'analogie numérique du moment mesuré expérimentalement en prenant en compte le profil de vitesse non-uniforme de l'écoulement dans la section d'essai. Pour cela, nous utilisons un modèle analytique et numérique non plus 2-D mais dit 2-D et demi (2.5-D).

## 6.2 Modèle analytique/numérique 2.5-D

### 6.2.1 Reconstruction numérique du moment

Nous supposons que l'écoulement réel  $U_{sec}(y, z)$  est un écoulement de Poiseuille dans une section carré telle qu'illustrée à la fig. 6.2.

Le moment est alors généré par le profil de vitesse 3-D dont il faut tenir compte. Étant donné l'impossibilité de faire de simulation tridimensionnelle, nous avons procédé à une reconstruction dites 2-D et demie (2.5D). La simulation numérique étant bidimensionnelle, les coefficients de force obtenus sont définis par unité de longueur. Pour une tranche  $dz$  de l'écoulement, le coefficient de force est alors  $C(z)dz$ , et le moment  $dM(z)$  dans le plan  $z$  est donc le produit vectoriel de la force  $dF(z)$  agissant sur le cylindre par la distance  $z$ .

$$dM(z) = \|d\vec{F} \otimes \vec{z}\| \quad (6.1)$$

Soit, en faisant apparaître le coefficient de force  $C(z)dz$  du plan  $z$  :

$$dM(z) = \left( \frac{1}{2} \rho_{exp} D_{exp} U_{sec, moy}^2(z) (C(z)dz) \right) z \quad (6.2)$$

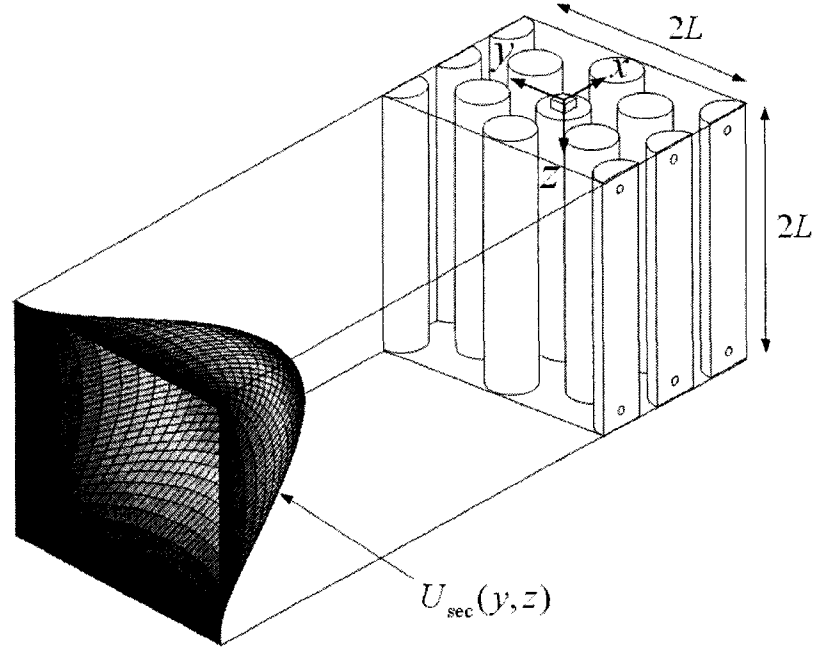


FIG. 6.2 Écoulement réel dans la section d'essai

Où  $U_{sec,moy}(z)$  est la vitesse moyenne du profil 2-D dans le plan  $z$ . On vient ensuite sommer sur la longueur du cylindre les tranches de moment  $dM(z)$ . Le moment total que l'on peut comparer à la valeur expérimentale est donc l'intégrale des  $dM(z)$  le long du cylindre ( $\Gamma_{Cyl}$ ) de longueur  $L_C$  :

$$M = \int_{\Gamma_{Cyl}} dM(z) \quad (6.3)$$

Soit :

$$M = \frac{1}{2} \rho_{exp} D_{exp} \int_{Z_j}^{Z_j+L_C} U_{sec,moy}^2(z) C(z) z dz \quad (6.4)$$

Où  $Z_j$  est le plan dans lequel se trouve le point d'origine de la jauge de contrainte. Pour évaluer ce moment, il nous faut d'une part connaître la distribution de vitesse dans la section d'essai  $U_{sec,moy}(z)$ , afin d'obtenir dans chaque plan  $z$  la valeur moyenne de la vitesse, et d'autre part connaître la distribution de force  $C(z)$ .

### 6.2.1.1 Détermination du profil de vitesse $U_{sec,moy}^2(z)$ dans la section d'essai

Nous déterminons la distribution de vitesse dans la section d'essai de façon analytique. On montre que le profil de vitesse d'écoulement développé dans une section carrée est (calcul en annexe IV),  $\forall(y, z) \in [0, 2L]$  :

$$\begin{aligned}
 u(y, z) = & V_0 \left[ \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n (\cosh(\beta_n(y-L)) \cos(\beta_n(z-L)) \right. \\
 & \left. + \cos(\beta_n(y-L)) \cosh(\beta_n(z-L))) - \left( \frac{y(y-2L)}{L^2} + \frac{z(z-2L)}{L^2} \right) \right] \quad (6.5) \\
 u(y, z) = & V_0 u'(y, z) \quad (6.6)
 \end{aligned}$$

où  $\beta_n$  et  $\alpha_n$  sont donnés :

$$\beta_n = \frac{\frac{\pi}{2} + (n-1)\pi}{L} \quad \text{et} \quad \alpha_n = \frac{4(-1)^n}{\beta_n L \cosh(\beta_n L)} \quad (6.7)$$

On obtient la valeur de  $V_0$  en considérant que la moyenne de  $u(y, z)$  représente la vitesse expérimentale mesurée  $V_{exp}$  :

$$V_{exp} = \frac{1}{4L^2} \int_0^{2L} \int_0^{2L} u(y, z) dy dz = V_0 \underbrace{\int_0^1 \int_0^1 u'(yL, zL) dy dz}_{R3D} \quad (6.8)$$

Nous obtenons alors la valeur de  $V_0$  (calcul en annexe) :

$$V_0 = \frac{V_{exp}}{R3D} \quad (6.9)$$

Le profil de vitesse étant complètement défini, il ne reste plus qu'à calculer la vitesse moyenne  $U_{sec,moy}(z)$  dans le plan  $z$  que l'on a dans la section d'essai :

$$U_{sec,moy}(z) = \frac{1}{2L} \int_0^{2L} u(y, z) dy = \int_0^1 u(yL, z) dy \quad (6.10)$$

La vitesse moyenne est donc, pour tout plan  $z$  (voir calcul en annexe) :

$$U_{sec,moy}(z) = V_0 \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\alpha_n}{\beta_n L} (\sinh(\beta_n L) \cos(\beta_n(z-L)) + \sin(\beta_n L) \cosh(\beta_n(z-L))) \right) - \left( -\frac{2}{3} + \frac{z(z-2L)}{L^2} \right) \right] \quad (6.11)$$

Une fois la vitesse moyenne connu dans chaque plan  $z$  de la section d'essai, il nous faut déterminer les coefficients de forces en fonction de  $z$ .

#### 6.2.1.2 Distribution du coefficient de force $C(z)$ en fonction de $z$

Nous voulons trouver le coefficient de force  $C(z)$  de façon numérique. Pour cela, nous faisons, comme vu précédemment, une étude par tranche où l'on vient récupérer pour chaque plan  $z$  le coefficient de force calculé par simulation numérique. La seule variable évoluant suivant la coordonnée  $z$  est la vitesse en raison de son profil non-uniforme dans la section, il est donc possible de définir le coefficient de force  $C(z)$  en fonction de la vitesse moyenne du plan  $z$  ou encore du nombre de Reynolds local dans le plan  $z$  :

$$C(z) = C(Re_{loc}(z)) \quad (6.12)$$

Il suffit alors de connaître la plage de variation du nombre de Reynolds local le long du cylindre pour ensuite faire les simulations nécessaires.

Nous procédons alors de la même façon que dans le chapitre 4. Les conditions de la simulation numérique dans le plan central  $z = L$  sont donc celles de notre première simulation ( $\rho = 1, D = 1, U_\infty = U_{num,moy}(z = L) = 1$ ). La vitesse au centre étant celle maximale, pour les autres plans  $z$  nous venons diminuer la vitesse moyenne à l'infini  $U_{num,moy}(z)$  de 1 à 0.1. Ces conditions vont ainsi nous permettre de reconstruire un profil de vitesse 3-D numérique qui correspond à l'écoulement dans une section carré dont les dimensions sont calculées à partir de la géométrie numérique (voir fig. 6.3).

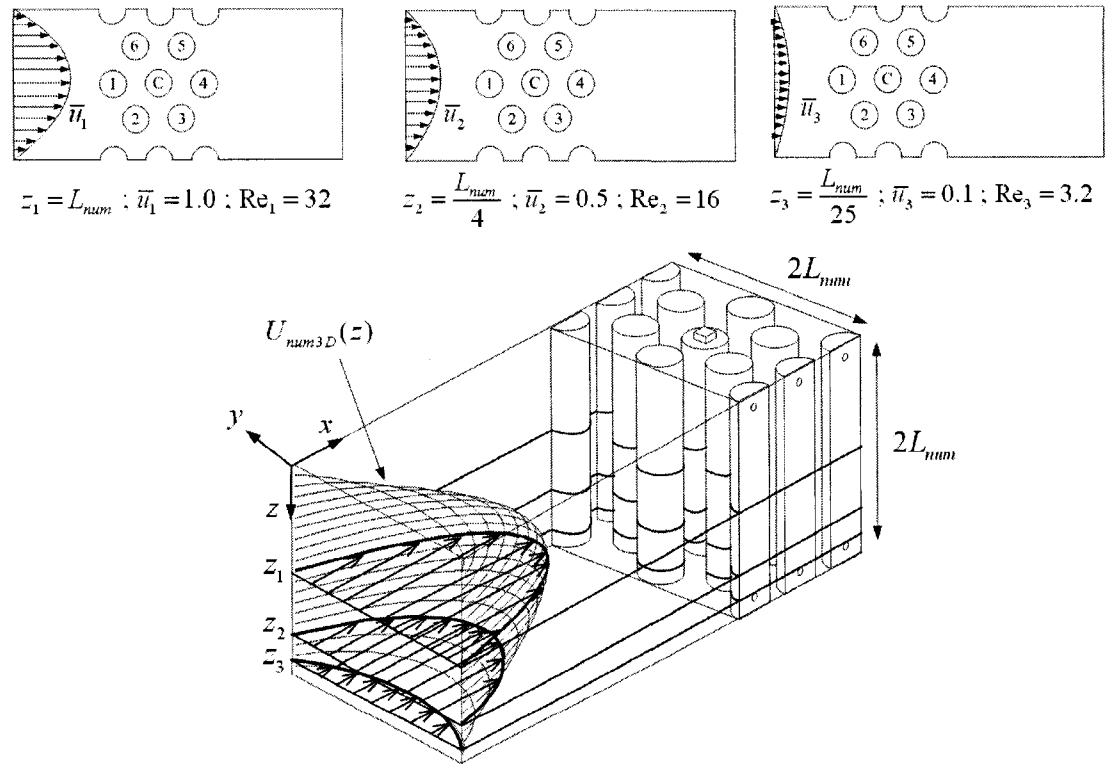


FIG. 6.3 Calculs de reconstruction numérique

Pour trouver la forme analytique de cet écoulement, nous devons trouver la longueur

$L_{num}$  et la vitesse de référence  $V_0$ . La section dans le plan  $(y, z)$  étant carrée, la longueur  $L_{num}$  est définie par la distance interstitielle des cylindres et donc le diamètre des cylindres ( $P/D = 1.5$ ) :

$$L_{num} = \sqrt{3}P = \frac{3\sqrt{3}}{2}D \quad (6.13)$$

Pour ce qui est de la vitesse de référence, nous savons que dans le plan central  $z = L$ , la vitesse moyenne du profil 2-D est égale à 1 :

$$\int_0^{L_{num}} u(y, 0) dy = 1 \quad (6.14)$$

$$V_0 \underbrace{\int_0^1 u'(yL_{num}, 0) dy}_{R2D} = 1 \quad (6.15)$$

La vitesse de référence  $V_0$ , pour avoir une vitesse moyenne du profil 2-D égale à 1, est donc (voir calcul en annexe) :

$$V_0 = \frac{1}{R2D} \quad (6.16)$$

Le profil de l'écoulement 3-D de notre étude numérique est donc défini. Il ne nous reste plus qu'à définir la viscosité pour pouvoir ensuite faire les simulations numériques nécessaires à la détermination de  $C(z)$ . Les simulations devant nous donner une approximation du moment mesuré expérimentalement, le nombre de Reynolds global numérique doit être équivalent et égal au nombre de Reynolds expérimental défini par :

$$Re_{exp} = \frac{\rho_{exp} D_{exp} V_{exp}}{\mu_{exp}} \quad (6.17)$$



Donc de la même façon, le nombre de Reynolds numérique est alors :

$$Re = \frac{\rho DV}{\mu} = \frac{V}{\mu} \quad (6.18)$$

$V$  représentant la vitesse moyenne du profil numérique 3-D. Or comme nous l'avons vu plus haut avec l'équation 6.9, la relation entre vitesse moyenne et vitesse de référence donne :

$$V = V_0 R3D \quad (6.19)$$

Alors :

$$V = \frac{R3D}{R2D} \quad (6.20)$$

On définit alors la valeur de la viscosité pour les simulations numériques comme :

$$\mu = \frac{V}{Re} \quad (6.21)$$

Maintenant que tous les paramètres nécessaires sont déterminés, nous pouvons obtenir la distribution des coefficients de force en fonction du nombre de Reynolds en variant la vitesse moyenne du profil 2-D.

### 6.2.1.3 Calcul des moments de portance et traînée

La symétrie de la configuration donnant un coefficient de portance  $C_L$  nul dans tout plan  $z$ , nous ne faisons les calculs que pour  $C_D$ . La table 6.1 donne les valeurs de  $C_D$  pour différentes valeurs de  $U_{num,moy}(z)$  soit différents nombres de Reynolds locaux  $Re_{loc}$ .

Une interpolation de Lagrange nous permet ainsi d'obtenir le coefficient de traînée  $C_D(Re_{loc})$  en fonction du nombre de Reynolds dans le plan  $z$ . Une fois les moments

$\mu_{num}$	$U_{num,moy}$	$Re_{loc}$	$C_D$
0.0312	1.0	32	17
	0.9	28.8	18.15
	0.8	25.6	19.59
	0.7	22.4	21.51
	0.6	19.2	24.05
	0.5	16	27.68
	0.4	12.8	33.12
	0.3	9.6	42.22
	0.2	6.4	61.50
	0.1	3.2	120.00

TAB. 6.1 Coefficient de traînée  $C_D$  pour différentes vitesses d'entrée.

déterminés, il nous faut calculer es dérivées de stabilité.

### 6.2.2 Reconstruction numérique des dérivées de stabilité

Nous appliquons la même démarche pour retrouver les sensibilités du moment en calculant la dérivée du moment par rapport à  $\tilde{\delta}a = \tilde{\delta}X$  et de même pour  $Y$ .

$$\frac{\partial M}{\partial \tilde{X}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{X}} \left( \frac{1}{2} \rho_{exp} D_{exp} \int_0^{L_C} U_{sec,moy}^2(z) C(z) z dz \right) \quad (6.22)$$

$$\frac{\partial M}{\partial \tilde{X}} = \frac{1}{2} \rho_{exp} D_{exp} \int_0^{L_C} U_{sec,moy}^2(z) \frac{\partial C}{\partial \tilde{X}}(z) z dz \quad (6.23)$$

Nous avons la même relation pour  $Y$ .

Il est alors nécessaire de connaître l'évolution des sensibilités de moment par rapport aux déplacements du cylindre central ( $X_C$  et  $Y_C$ ) selon le nombre de Reynolds. La table 6.2 expose les différentes valeurs des sensibilités suivant le nombre de Reynolds local.

$\mu_{num}$	$Re_{loc}$	$\frac{\partial C_D}{\partial X}$	$\frac{\partial C_L}{\partial Y}$
0.0312	32.0	1.34	-17.32
	28.8	1.58	-20.15
	25.6	1.75	-23.56
	22.4	1.92	-27.80
	19.2	2.00	-33.11
	16.0	2.00	-40.32
	12.8	1.875	-50.62
	9.6	1.82	-64.66
	6.4	1.90	-81.25
	3.2	2.00	-99

TAB. 6.2 Coefficient de traînée  $C_D$  pour différentes vitesses d'entrée.

Nous utilisons aussi une interpolation de Lagrange pour le calcul de l'intégrale. La table 6.3 expose les valeurs des moments de traînée et portance, ainsi que les dérivées de stabilité, calculées numériquement lorsque le cylindre central est positionné au centre de la configuration (0%D).

$M_D$	$M_L$	$\frac{\partial M_L}{\partial Y_C}$	$\frac{\partial M_D}{\partial Y_C}$	$\frac{\partial M_L}{\partial X_C}$	$\frac{\partial M_D}{\partial X_C}$
0.842	0.000	-0.978	0.00	0.00	0.07

TAB. 6.3 Moment en portance et traînée et leurs dérivées suivant  $X_C$  et  $Y_C$ .

Ces valeurs sont donc les valeurs que nous devrions retrouver expérimentalement. Bien sûr, le calcul numérique nous donne des valeurs nominales, en réalité les paramètres de l'écoulement sont proches de ces valeurs mais pas exactement celle-ci, il est important alors de faire un calcul d'incertitude et la méthode des équations de sensibilité est très utile pour cela.

### 6.2.3 Calcul d'incertitude

Toute procédure de mesure expérimentale s'accompagne d'une analyse d'incertitude afin d'indiquer jusqu'à quel point nous pouvons nous fier aux valeurs mesurées. Les sensibilités sont un outil intéressant pour effectuer de telles analyses. En effet l'incertitude d'une mesure représente sa variation par rapport aux différents paramètres qui influent sur le système de mesure. Il est important de comprendre que deux types d'incertitude existent :

- 1- Celle due à l'écart entre les valeurs nominales et les valeurs réelles des paramètres du système expérimental (cotations, densité de fluide, viscosité de fluide, ...)
- 2- Celle due à la variation dans le temps de certains paramètres au moment des mesures.

La simulation numérique étant faite avec des valeurs nominales des paramètres d'écoulement, l'incertitude de type 1 va donc nous permettre de faire avec confiance les comparaisons entre résultats expérimentaux et numériques. L'incertitude de type 2, quant à elle, décrit plus le caractère de répétabilité des mesures. La différence entre l'incertitude de type 1 et celle de type 2 se traduit dans la quantification des incertitudes sur les paramètres qui influent sur le système expérimental. On répertorie les paramètres d'incertitude présente dans notre cas :

- Le positionnement des cylindres de la configuration  $X_C$  et  $Y_C$ .
- Le débit du fluide  $Q = U_\infty \cdot A$ .
- La densité  $\rho$  et la viscosité  $\mu$  de la glycérine.
- Le diamètre  $D$  du cylindre.

Nous présentons ici deux calculs d'incertitude : celui sur les moments induits puis celui sur les dérivées de stabilité. Nous expliquerons, pour chaque cas, quel type d'incertitude nous étudions. Le lecteur intéressé trouvera un exposé plus complet, sur l'analyse et les calculs d'incertitude, en annexe.

### 6.2.3.1 Calcul d'incertitude sur les moments induits

Pour notre étude, nous voulons estimer les incertitudes sur les moments. Cette estimation nous permet ensuite de comparer les valeurs expérimentales et numériques des moments, nous calculons donc l'incertitude de type 1.

L'incertitude totale  $I_{tot}$  sur le moment  $M$ , portance comme traînée, s'écrit donc :

$$I_{tot} = \Delta X_{iC} s_M^{X_C} + \Delta Y_C s_M^{Y_C} + \Delta U s_M^U + \Delta \rho s_M^\rho + \Delta D s_M^D + \Delta \mu s_M^\mu \quad (6.24)$$

Il suffit alors de calculer les différentes sensibilités de  $M$  par rapport à un paramètre  $a$  qui s'écrivent sous la forme :

$$\frac{\partial M}{\partial a} = \int_0^L \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial (\rho D U^2(z))}{\partial a} C(z) + \rho D U^2(z) \frac{\partial C}{\partial a}(z) \right] z dz \quad (6.25)$$

La dernière étape nécessaire pour le calcul de ces incertitudes est la quantification des incertitudes sur les paramètres de l'écoulement dues aux imprécisions des mesures ou celles de l'usinage. Les valeurs expérimentales des paramètres d'écoulement sont :

$$\rho_{exp} = 1243 \text{ kg/m}^3 \pm 0.5 \quad ; \quad D_{exp} = 0.750 \text{ pouce} \pm 0.001 \quad (6.26)$$

$$\mu_{exp} = 0.85 \text{ Nm}^{-2}\text{s} \pm 0.02 \quad (0.5 \text{ °Celsius d'imprécision}) \quad (6.27)$$

$$V_{exp} = 0.80 \text{ m/s} \pm 0.01 \quad (6.28)$$

$$X_C = 0.0 \pm 0.005 \text{ po} \quad ; \quad Y_C = 0.0 \pm 0.005 \text{ po} \quad (6.29)$$

On quantifie donc l'incertitude avec les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} \Delta \rho &= 0.0005 \text{ kg/m}^3 \quad ; \quad \Delta D = 0.001 \text{ po} \quad ; \quad \Delta V = 0.01 \text{ m/sec} \\ \Delta \mu &= 0.02 \text{ Nm}^{-2}\text{s} \quad ; \quad \Delta X_C = 0.005 \text{ po} \quad ; \quad \Delta Y_C = 0.005 \text{ po} \end{aligned} \quad (6.30)$$

La table 6.4 donne les incertitudes pour les moments de traînée et portance à la position  $0\%D$ . Tous les calculs sont détaillés en annexe.

Position	$I_{tot}(M_L)$	$I_{tot}(M_D)$
$0\%D$	0.00737	0.02860

TAB. 6.4 Incertitudes sur les mesures expérimentales par rapport aux valeurs nominales.

Ainsi, les valeurs mesurées expérimentalement devraient se trouver dans l'intervalle  $[M_{num} - I_{tot}(M), M_{num} + I_{tot}(M)]$ .

$$M_{Dexp} = 0.842 \text{ Nm} \pm 0.028 \quad (6.31)$$

$$M_{Lexp} = 0.000 \text{ Nm} \pm 0.007 \quad (6.32)$$

### 6.2.3.2 Calcul d'incertitude sur les dérivées de stabilité

L'estimation de l'incertitude sur les dérivées de stabilité se définit mathématiquement en utilisant la même procédure que pour l'incertitude sur les moments. Pour cela, on définit la plage d'incertitude de la sensibilité des moments par rapport aux déplacements  $X_C$  et  $Y_C$  du cylindre central. Nous devons donc calculer, par exemple pour  $s_M^{X_C}$  :

$$\begin{aligned}
 I_{tot}(s_M^{X_C}) = & \Delta X_C s_M^{X_C, X_C} + \Delta Y_C s_M^{Y_C, X_C} + \Delta U s_M^{U, X_C} + \Delta \rho s_M^{\rho, X_C} \\
 & + \Delta D s_M^{D, X_C} + \Delta \mu s_M^{\mu, X_C} \quad (6.33)
 \end{aligned}$$

Les sensibilités croisées  $s_M^{a,X_C}$ , avec  $a \in [X_C, Y_C, U, \rho, D, \mu]$  étant :

$$s_M^{a,X_C} = \int_0^L \frac{1}{2} \rho D U^2(z) \frac{\partial C}{\partial a \partial X_C}(z) z dz \quad (6.34)$$

Nous avons la même relation pour  $Y_C$ . Comme nous pouvons le voir, pour connaître l'incertitude de type 1 de  $s_M^{X_C}$  et  $s_M^{Y_C}$ , il nous faut connaître les dérivées secondes des coefficients de force par rapport à  $X_C$  et  $Y_C$  ainsi que les dérivées croisées décrivant le comportement de  $s_M^{X_C}$  suivant la variation des paramètres d'écoulement. Il faut donc calculer numériquement les sensibilités d'ordre deux, données que le code numérique ne calcule pas présentement. Avoir une estimation de l'incertitude sur les dérivées de stabilité est cependant une chose importante pour assurer une bonne validation des calculs numériques. Afin d'obtenir ces estimations, nous avons donc calculé les incertitudes sur les moments pour les positions  $0\%D$ ,  $4\%DX$  et  $4\%DY$  puis obtenu ainsi les incertitudes sur les dérivées de stabilité par différence finie.

$$I_{tot}(s_M^{X_C}) = \frac{2I_{tot}(M)}{\Delta X_C} \quad (6.35)$$

Nous procédons de la même façon suivant  $Y$ .

Quantifier l'incertitude de type 1 sur les dérivées de stabilité en faisant une différence finie ne reflète absolument pas la réalité (valeur beaucoup trop élevées), nous nous sommes alors tournés vers une estimation de l'incertitude de type 2.

Pour quantifier les variations des paramètres d'écoulement, il faut comprendre comment le système expérimental se comporte. Le système d'étalon de mesure nous permet de placer le cylindre central avec la précision des mesures des étalons. La plupart de l'imprécision que nous avons sur la vitesse vient du système de mesure, sa vraie variation durant les essais est bien plus faible car nous répétons exactement la même procédure pour chaque mesure. En ce qui concerne la viscosité, le

moyen de déplacement du cylindre sans vider le réservoir nous permet d'obtenir une température quasi-constante, ce qui amène aussi une variation quasiment nulle de la densité. On quantifie donc l'incertitude de type 2 avec les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} \Delta\rho &= 0.0kg/m^3 & ; & & \Delta D &= 0.0pouce & ; & & \Delta V &= 0.001m/sec \\ \Delta\mu &= 0.005Nm^{-2}s & ; & & \Delta X_C &= 0.001pouce & ; & & \Delta Y_C &= 0.001pouce \end{aligned} \quad (6.36)$$

Les incertitudes de sensibilité sont alors :

$I_{tot}(s_{M_L}^{X_C})$	$I_{tot}(s_{M_D}^{X_C})$	$I_{tot}(s_{M_L}^{Y_C})$	$I_{tot}(s_{M_D}^{Y_C})$
0.0225	0.147	0.0600	0.141

TAB. 6.5 Incertitudes sur les séries de mesure

Cette méthode n'est donc qu'une approximation. En effet, elle prend en compte les variations des dérivées due aux variations des paramètres d'écoulement d'une mesure à l'autre mais ne prend pas en compte les écarts entre les dérivées expérimentales et numériques due aux écarts avec les valeurs nominales (que l'on trouverait avec les dérivées croisées). Le comportement des paramètres étant assez linéaire aux alentours de 0%, nous pouvons espérer que ces dérivées croisées soient assez faibles.

Ainsi, les valeurs mesurées expérimentalement des dérivées de stabilité devraient se trouver dans l'intervalle  $[s_{M_{num}}^{X_C} - I_{tot}(s_M^{X_C}), s_{M_{num}}^{X_C} + I_{tot}(s_M^{X_C})]$  et nous avons la même relation pour  $Y_C$ .



$$s_{M_{Lexp}}^{X_C} = 0.000Nm/m \pm 0.022Nm/m \quad (6.37)$$

$$s_{M_{Dexp}}^{X_C} = 0.070Nm/m \pm 0.147Nm/m \quad (6.38)$$

$$s_{M_{Lexp}}^{Y_C} = -0.977Nm/m \pm 0.060Nm/m \quad (6.39)$$

$$s_{M_{Dexp}}^{Y_C} = 0.000Nm/m \pm 0.141Nm/m \quad (6.40)$$

Nous comparons les résultats dans la section suivante.

### 6.3 Résultats expérimentaux et comparaisons avec le modèle 2.5-D

Après avoir vu les résultats des mesures de la vitesse et des moments suivant la position du cylindre central, nous allons comparer en premier lieu les valeurs des moments à la position centrale  $0\%D$  du cylindre flexible, puis les sensibilités des moments, par rapport aux déplacements  $X_C$  et  $Y_C$  du cylindre flexible et par rapport à la vitesse d'entrée  $U$ .

Trois séries de mesures expérimentales ont été faites afin de s'assurer de la répétabilité des résultats. Comme vu précédemment, la vitesse choisie fût de  $0.8m/sec$ , la viscosité de la glycérine est de  $\mu = 0.85Nm^{-2}s$  et sa densité de  $\rho = 1243kg/m$  donnant un nombre de Reynolds nominal de  $Re = 22.28$ .

#### 6.3.1 Mesure de la vitesse expérimentale

Les tableaux 6.6 et 6.7 présentent les différentes valeurs de vitesse mesurées lors des essais pour les déplacements suivant la direction  $X$  et  $Y$ .

En conclusion, nous pouvons dire que la vitesse reste assez constante avec un écart

Série	$-8\%D$	$-4\%D$	$+0\%D$	$-0\%D$	$+4\%D$	$+8\%D$
1	0.800	0.803	0.802	0.805	0.809	0.805
2	0.801	0.799	0.802	0.800	0.805	0.797
3	0.803	0.800	0.799	0.802	0.806	0.804

TAB. 6.6 Mesures répétées de vitesse (déplacement  $X$ )

Série	$-8\%D$	$-4\%D$	$+0\%D$	$-0\%D$	$+4\%D$	$+8\%D$
1	0.801	0.810	0.809	0.808	0.803	0.803
2	0.805	0.799	0.803	0.806	0.806	0.808
3	0.798	0.800	0.802	0.802	0.807	0.805

TAB. 6.7 Mesure répétées de vitesse (déplacement  $Y$ )

maximal de  $0.01 \text{ m/sec}$  par rapport à la valeur choisie. Cet écart étant crée par deux phénomènes : la réelle variation de la vitesse d'une mesure à l'autre mais surtout l'incertitude de la méthode de traitement d'image.

### 6.3.2 Mesures expérimentales des moments de portance et de traînée

Nous allons maintenant présenter les résultats des mesures expérimentales faites avec le système expérimental construit au sein du laboratoire Fluide-Structure. Les tableaux 6.8 et 6.9 présentent les résultats pour les trois séries de mesures expérimentales.

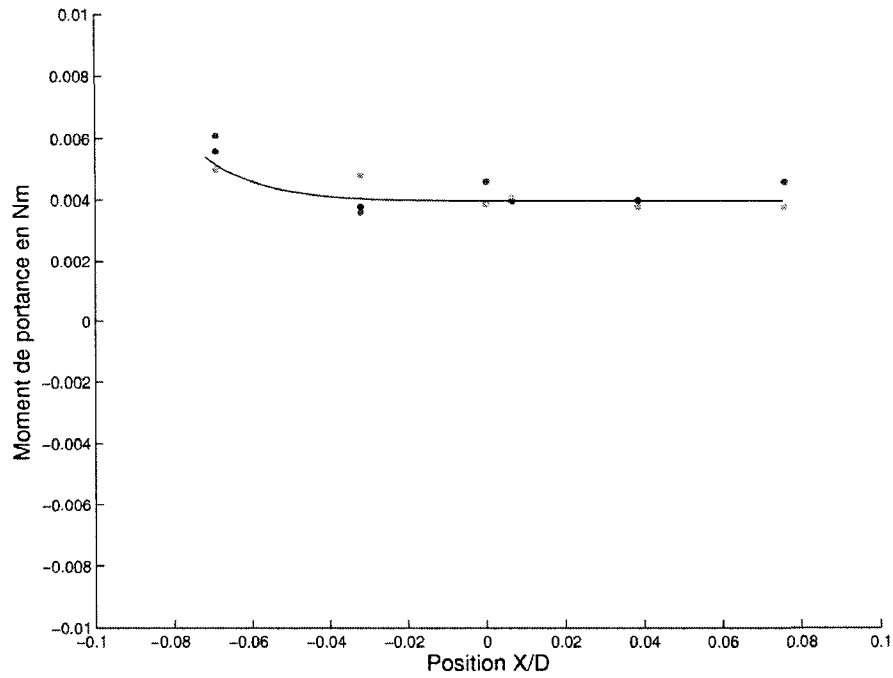
Série	$-8\%D$	$-4\%D$	$+0\%D$	$-0\%D$	$+4\%D$	$+8\%D$
$M_D(1)$	0.865	0.864	0.866	0.867	0.871	0.883
$M_D(2)$	0.866	0.865	0.867	0.867	0.873	0.884
$M_D(3)$	0.865	0.861	0.863	0.866	0.872	0.883
$M_L(1)$	0.0061	0.0036	0.0046	0.0041	0.0040	0.0046
$M_L(2)$	0.0056	0.0038	0.0039	0.0040	0.0040	0.0038
$M_L(3)$	0.0050	0.0048	0.0039	0.0041	0.0038	0.0038

TAB. 6.8 Valeurs expérimentales des moments mesurés pour un déplacement du cylindre central dans la direction  $X$

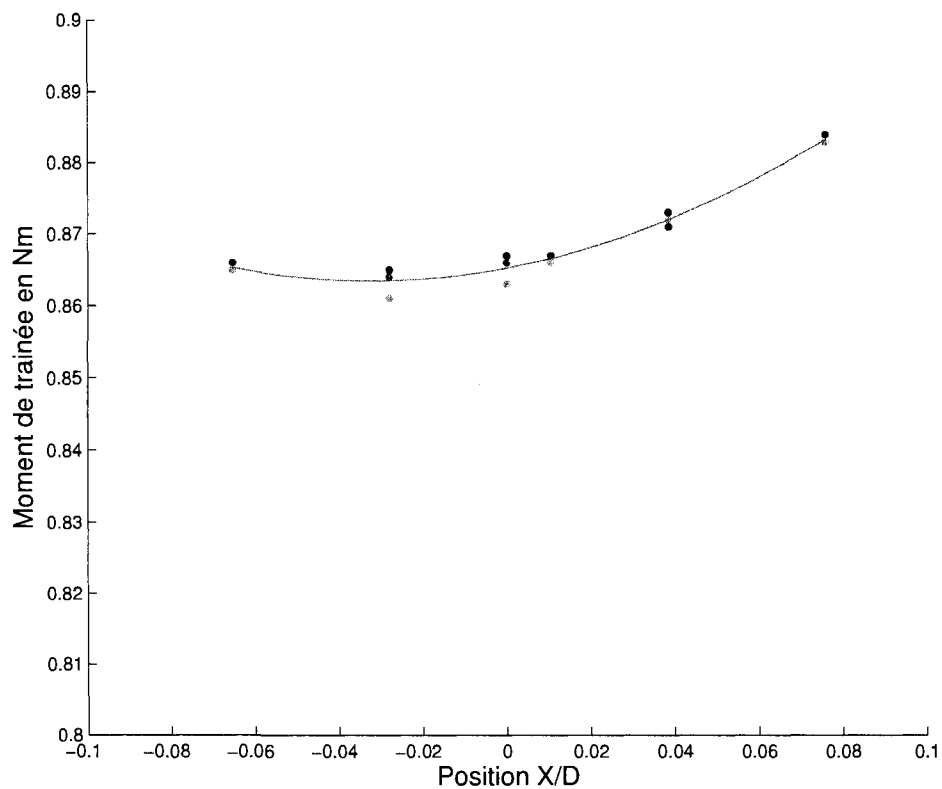
Série	$-8\%D$	$-4\%D$	$+0\%D$	$-0\%D$	$+4\%D$	$+8\%D$
$M_D(1)$	0.869	0.869	0.867	0.867	0.865	0.864
$M_D(2)$	0.866	0.868	0.865	0.864	0.868	0.862
$M_D(3)$	0.866	0.869	0.863	0.863	0.866	0.862
$M_L(1)$	0.0726	0.0343	0.0045	-0.0093	-0.0417	-0.0799
$M_L(2)$	0.0744	0.0367	0.0010	-0.0075	-0.0386	-0.0793
$M_L(3)$	0.0748	0.0328	0.0012	-0.0066	-0.0418	-0.0820

TAB. 6.9 Valeurs expérimentales des moments mesurés pour un déplacement du cylindre central dans la direction  $Y$

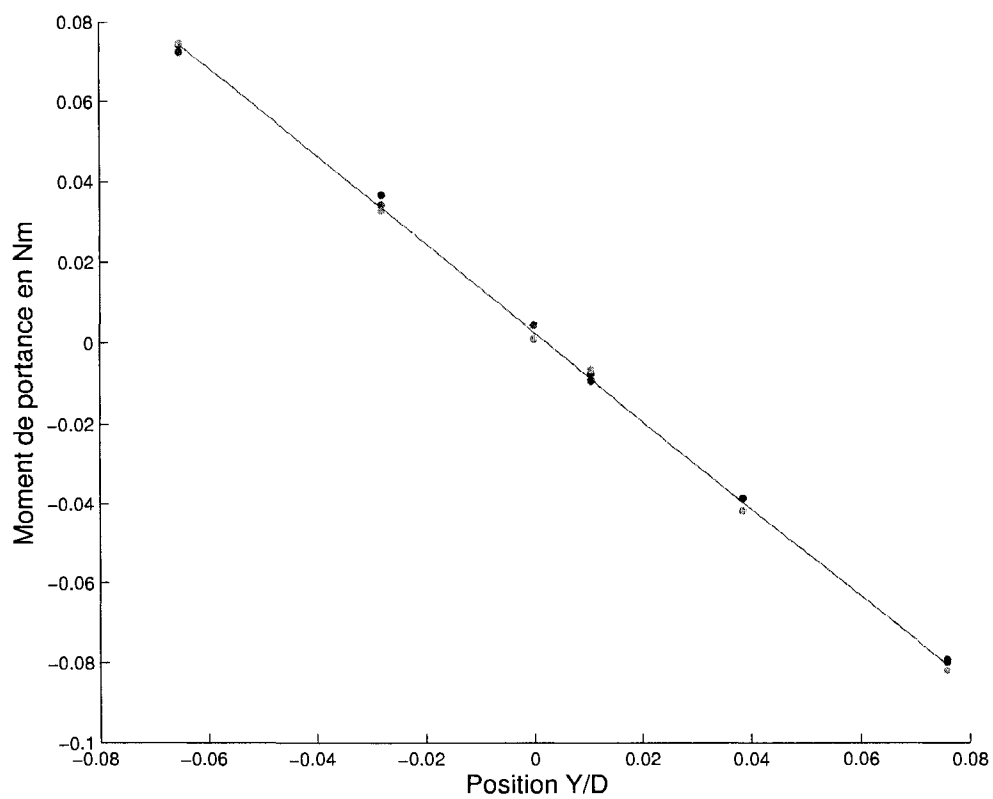
Les figures 6.4, 6.5, 6.6 et 6.7 représentent l'évolution des mesures des moments de traînée et portance suivant la position du cylindre central. La courbe, présente sur chaque graphe, représente l'allure générale de l'évolution du moment considéré.

FIG. 6.4  $M_L(X)$ 

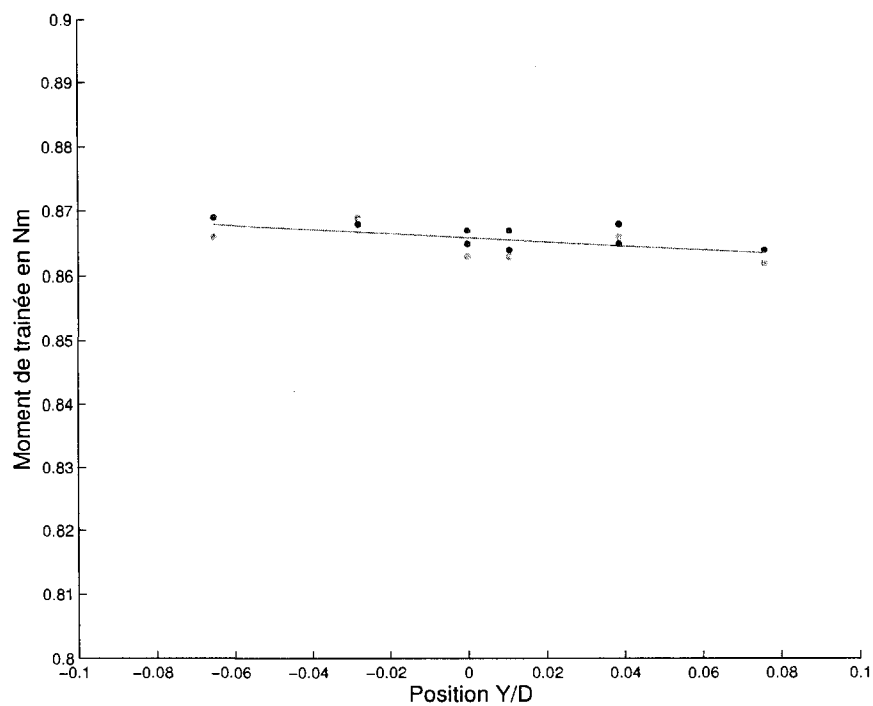
Lorsque nous déplaçons le cylindre flexible suivant la direction  $X$  de l'écoulement, la symétrie par rapport à  $X$  de la configuration est conservée. Ainsi, comme la simulation numérique l'avait prédit, nous voyons que la portance reste constante quelque soit la position du cylindre. La portance en  $X = -8\%D$  est cependant un peu plus forte, en valeur absolue, que pour les autres positions. Cela pourrait provenir du système linéaire dont les rainures de guidage suivant la direction  $X$  dévient un peu suivant  $Y$  (voir Fig. 6.9). Cette déviation serait alors remarquable pour la position  $X = -8\%D$ .

FIG. 6.5  $M_D(X)$ 

La variation de la traînée suivant la direction de l'écoulement est la plus difficile à bien déterminer. En effet celle-ci étant plutôt faible, la mesure à la position  $X = +8\%D$  fût indispensable pour sortir une courbe d'évolution proche de la réalité.

FIG. 6.6  $M_L(Y)$ 

Les mesures du moment de portance par rapport à la position du cylindre central suivant la direction  $Y$  donnent une tendance quasi-linéaire.

FIG. 6.7  $M_D(Y)$ 

Le moment de traînée semble rester quasiment constant si l'on prend en considération les variations des mesures.

## 6.4 Analyse des résultats sur les moments à la position 0%D

Nous présentons d'abord les valeurs des moments induits, puis leurs plage d'incertitudes pour ensuite faire la comparaison entre les prédictions numériques et les mesures expérimentales.

### 6.4.1 Valeurs numériques et expérimentales des moments induits

La table 6.10 présente les moments induits calculés numériquement et ceux des trois séries de mesures expérimentales à la position centrale 0% lorsque l'on se déplace suivant  $X$  et lorsque l'on se déplace suivant  $Y$  avec les incertitudes numériques par rapport aux valeurs nominales.

Valeurs	$M_L(X = 0)$	$M_L(Y = 0)$	$M_D(X = 0)$	$M_D(Y = 0)$
Numérique	0.0000	0.0000	0.842	0.842
Incertitude	$\pm 0.0070$	$\pm 0.0070$	$\pm 0.028$	$\pm 0.028$
1 <sup>re</sup> série	0.0046	0.0045	0.866	0.867
2 <sup>me</sup> série	0.0039	0.0010	0.867	0.865
3 <sup>me</sup> série	0.0039	0.0012	0.863	0.863

TAB. 6.10 Incertitudes sur les mesures expérimentales par rapport aux valeurs nominales

### 6.4.2 Comparaison

La figure 6.8 montre les résultats numériques et expérimentaux avec leurs intervalles d'incertitude.



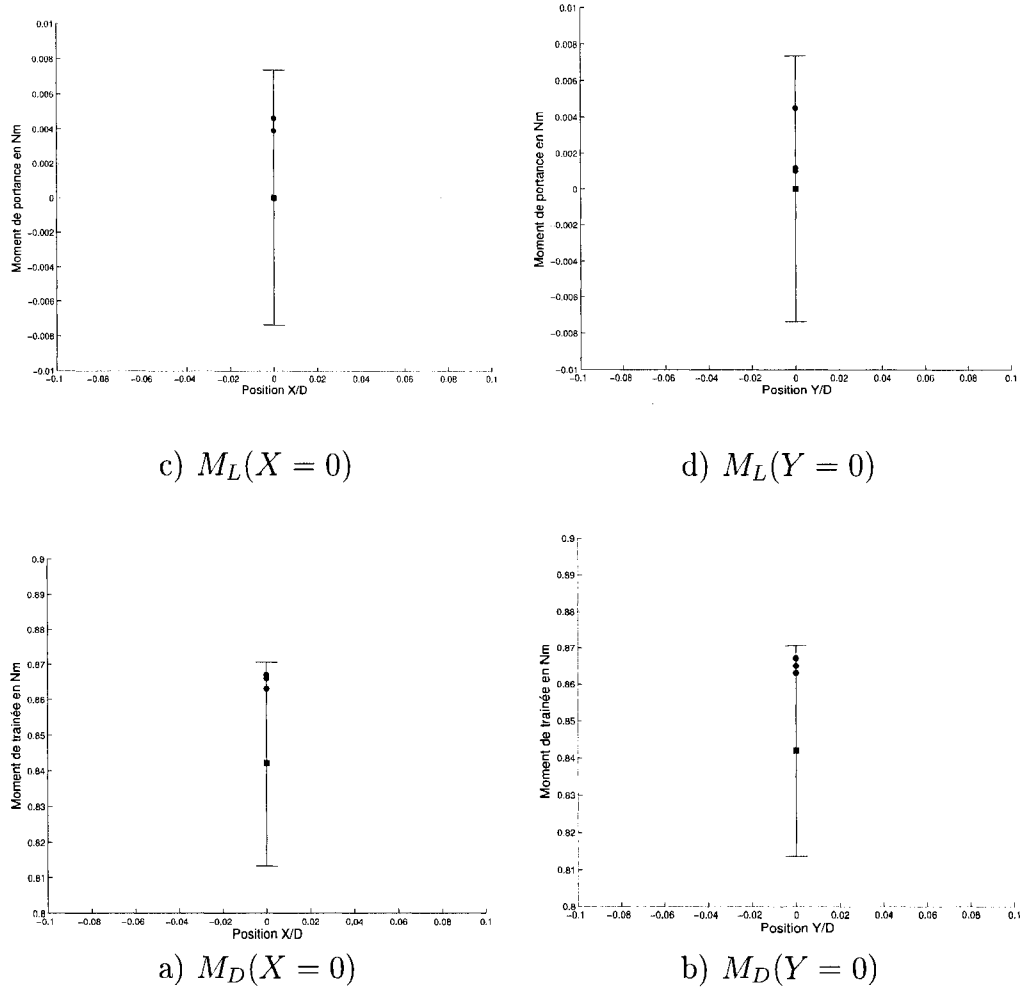


FIG. 6.8 Moments induits à la position 0%D. - carré = valeur numérique, rond = valeur expérimentale -

Plusieurs remarques peuvent être apportées. Contrairement au résultat numérique, le moment de portance expérimental n'est pas complètement nul, ce à quoi nous pouvions nous attendre. En effet, en raison du tolérancement d'usinage des différentes pièces de la section d'essai, un décalage du support de guidage par rapport au centre réel de la configuration apparaît résultant en une portance non nulle à la position centrale. La figure 6.9 illustre ce problème,  $O_e$  représente le centre réel

de la configuration,  $O_g$  le centre du support de guidage,  $X + 0\%D$  et  $Y + 0\%D$  les coordonnées du cylindre lorsqu'on place le guidage respectivement suivant  $X$  et  $Y$ . Comme on peut le voir l'écoulement va suivant  $X_{echt}$  alors que le guidage va suivant  $X_{guid}$ . Ce décalage reste cependant acceptable et dans l'intervalle d'incertitude par rapport à la valeur nulle trouvée numériquement.

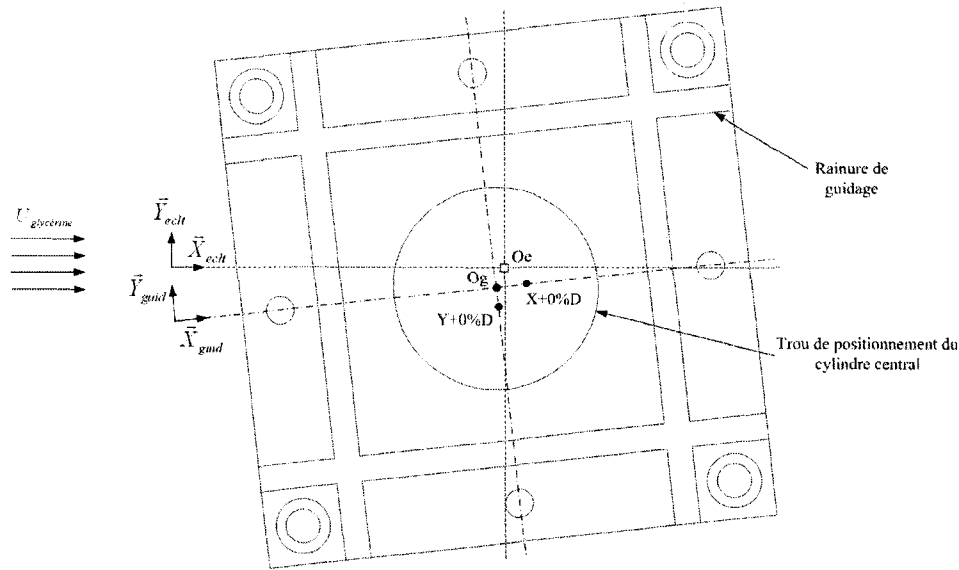


FIG. 6.9 Support de guidage du cylindre central

Nous voyons que les valeurs expérimentales du moment de traînée sont les mêmes pour la position centrale suivant la direction  $X$  et suivant la direction  $Y$ , ce qui vient valider la bonne calibration des deux couples de jauges. Comme nous pouvons le voir l'écart entre les valeurs expérimentales ( $0.863 < M_{Dexp} < 0.867$ ) et la valeurs numérique ( $M_{Dnum} = 0.842$ ) est en concordance avec le calcul d'incertitude donnant un écart moyen de  $0.023 Nm$  soit  $2.7\%$  de la valeur numérique.

Ainsi, la reconstruction 2.5-D nous a permis d'obtenir une bien meilleure approximation de la valeur expérimentale passant de  $18\%$  à seulement  $2.7\%$  d'écart avec la valeur numérique. Nous pouvons donc conclure que les coefficients de force calculés numériquement sont justes. Le calcul numérique de l'écoulement est donc validé,

voyons ce qu'il en est du calcul de sensibilité.

### 6.5 Analyse des résultats sur les taux de variation des moments par rapport au positionnement du cylindre

Nous obtenons les taux de variation des moments par rapport au positionnement du cylindre centre (dérivées de stabilité) par interpolation faite sur chaque série de mesure. On vient ensuite chercher la valeur de la dérivée en 0 de la fonction interpolée.

#### 6.5.1 Valeurs numériques et expérimentales des dérivées de stabilité :

Nous faisons la comparaison des résultats pour les quatres dérivées de stabilité  $s_{M_L}^{X_C}$ ,  $s_{M_D}^{X_C}$ ,  $s_{M_L}^{Y_C}$  et  $s_{M_D}^{Y_C}$ . Nous présentons pour chaque cas la valeur numérique de la sensibilité avec son incertitude  $I_{num}$  déterminée numériquement, et les valeurs des dérivées de stabilité trouvées expérimentalement. Les dérivées expérimentales sont calculées en faisant une interpolation pour chaque série de mesure et calculant la dérivée à l'origine de cette interpolation.

**Sensibilité  $s_{M_L}^{X_C}$  du moment de portance par rapport à  $X_C$  :**

Numérique	$I_{num}$	1 <sup>re</sup> série	2 <sup>me</sup> série	3 <sup>me</sup> série
0.000	0.022	0.010	0.012	0.008

Les dérivées expérimentales de la portance par rapport à  $X$  sont bien englobés par l'incertitude calculée numériquement (entre  $-0.022$  Nm/m et  $0.022$  Nm/m).

Nous pouvions nous attendre à un résultat correct concernant la portance suivant  $X$ , l'usinage est assez précis pour que la condition de symétrie soit assez bien respectée et donc obtenir une dérivée nulle.

**Sensibilité  $s_{M_D}^{X_C}$  du moment de traînée par rapport à  $X_C$  :**

Numérique	$I_{num}$	1 <sup>re</sup> série	2 <sup>me</sup> série	3 <sup>me</sup> série
0.070	0.147	0.109	0.111	0.112

La sensibilité de la traînée suivant  $X$  est plus difficile à bien mesurer. Nous interpolons quadratiquement les résultats expérimentaux et trouvons une valeur moyenne de dérivée de  $s_{M_D}^{X_C} = 0.111$  Nm/m. Cet écart de 0.04 Nm/m entre la valeur numérique et celle expérimentale paraît grand en terme de pourcentage mais reste cependant assez faible. La valeur numérique nous donnant une bonne approximation de la variation du moment. Il est important aussi de noter que si nous interpolons les résultats expérimentaux entre  $-4\%D$  et  $+4\%D$  (au lieu de  $-8\%D$  et  $+8\%D$ ), la valeur de la dérivée varie entre 0.089 Nm/m et 0.150 Nm/m. Ainsi cette valeur est aussi sensible à la méthode d'interpolation. Nous nous attendions à ces problèmes en raison de la valeur importante de l'incertitude de mesure. Une amélioration de la précision des jauges de contrainte ainsi qu'un élargissement de l'intervalle de déplacement du cylindre central (aller par exemple de  $-16\%D$  à  $16\%D$ ) nous permettrait peut être d'affiner nos résultats.

Numérique	$I_{num}$	1 <sup>re</sup> série	2 <sup>me</sup> série	3 <sup>me</sup> série
-0.977	0.060	-1.077	-1.086	-1.108

### Sensibilité $s_{M_L}^Y$ du moment de portance par rapport à $Y$ :

Du fait du passage d'une valeur nulle à une valeur non-nulle de la portance, les résultats sur cette sensibilité sont sans équivoque les plus précis. De plus, le comportement quasi-linéaire de la portance suivant  $Y$  dans notre intervalle de déplacement nous à permis de faire des interpolations linéaires précises. Si l'on compare la valeur numérique ( $-0.977Nm/m$ ) avec la valeur expérimentale moyenne ( $-1.090Nm/m$ ), nous obtenons un écart relatif de 11%, par rapport à la valeur numérique. Or l'estimation de l'incertitude numérique nous dit que, considérant les variations des paramètres d'écoulement lors des mesures, cette sensibilité peut en fait être comprise entre  $-0.917Nm/m$  et  $-1.037Nm/m$ . Si l'on considère la borne minimal de cet intervalle d'incertitude, nous réduisons ainsi l'écart entre les deux résultats à 5%.

Ainsi le résultat sur la dérivée de stabilité de la portance par rapport au déplacement transversal valide de façon assez précise le résultat numériques trouvé grâce aux équations de sensibilité.

### Sensibilité $s_{M_D}^{Y_C}$ du moment de portance par rapport à $Y_C$ :

Les résultats expérimentaux sont aussi bien englobés par l'incertitude estimée numériquement (mesures entre  $-0.147 Nm/m$  et  $0.147 Nm/m$ ). Il semble cependant que la traînée tend un peu à diminuer lorsque nous déplaçons le cylindre vers

Numérique	$I_{num}$	1 <sup>re</sup> série	2 <sup>me</sup> série	3 <sup>me</sup> série
0.000	0.147	-0.039	-0.023	-0.031

le haut. Cela peut sûrement s'expliquer avec l'usinage des pièces, le support de guidage n'étant pas parfaitement normal à la direction de l'écoulement, un déplacement suivant  $Y$  du cylindre peut entraîner aussi un déplacement suivant  $X$  (voir Fig. 6.9), résultant en un changement faible de la valeur de la traînée.

### 6.6 Analyse des résultats sur les sensibilités du moment par rapport à la vitesse d'entrée

On mesure ce taux de variation en prenant les mesures du moment de traînée faites en  $X = +0\%D$  pour une vitesse d'entrée de  $U = 0.80m/sec$  et à la même position mais pour une vitesse d'entrée de  $U = 1.00m/sec$ .

La table 6.11 relate les mesures expérimentales des moments induits en fonction de la vitesse d'entrée.

Valeurs	$M_L(U = 0.8)$	$M_L(U = 1.0)$	$M_D(U = 0.8)$	$M_D(U = 1.0)$
1 <sup>re</sup> mesure	0.0046	0.0065	0.866	1.125
2 <sup>me</sup> mesure	0.0039	0.0059	0.867	1.123
3 <sup>me</sup> mesure	0.0039	0.0060	0.863	1.123

TAB. 6.11 Incertitudes sur les mesures expérimentales par rapport aux valeurs nominales

Un calcul par différence finie des valeurs moyennes nous donne les sensibilités ex-

périmentales. Ces résultats, ainsi que ceux numériques, sont donnés dans la table 6.12.

Résultat	$s_{M_L}^U$	$s_{M_D}^U$
Expérimental	0.010	1.291
Numérique	0.000	1.219

TAB. 6.12 Sensibilités expérimentales des moments induits par rapport à la vitesse  $U$

Aucun calcul d'incertitude n'a été fait pour cette sensibilité par faute de temps. Les résultats semblent cependant encourageants. Le cylindre central étant un peu décalé par rapport au centre réel, il est logique que nous trouvions expérimentalement une variation de la portance suivant la vitesse. Cette variation reste cependant assez négligeable donnant une valeur expérimentale de  $s_{M_L}^U = 0.01 \text{ Nm}/(\text{m.s}^{-1})$  pour une valeur numérique nulle. En ce qui concerne la traînée, le résultat est aussi plutôt bon, donnant une valeur expérimentale de  $s_{M_D}^U = 1.29 \text{ Nm}/(\text{m.s}^{-1})$  pour une valeur numérique de  $s_{M_D}^U = 1.22 \text{ Nm}/(\text{m.s}^{-1})$  soit 5.7% d'écart relatif par rapport à la valeur numérique. Cette différence de valeur étant probablement due aux écarts de valeur des paramètres du système expérimental par rapport aux valeurs nominales. Il semble donc possible de conclure que le calcul numérique de la sensibilité du moment par rapport à la vitesse est validé.

## 6.7 Conclusion sur l'expérimentation et les comparaisons

Le système expérimental a été conçu afin de valider les coefficients de force mais surtout les dérivées de stabilité trouvées numériquement grâce à la méthode des équations de sensibilité. Les essais expérimentaux nous ont permis de mesurer les

moments de force à diverses positions du cylindre central, nous permettant d'obtenir ensuite le taux de variation du moment par rapport aux déplacements  $X_C$  et  $Y_C$ . Nous avons porté essentiellement notre attention sur le moment de traînée  $M_D$  subit par le cylindre central pour valider la méthode de calcul numérique de l'écoulement, puis nous avons porté notre attention sur la variation du moment de portance par rapport au déplacement transversal  $s_{M_L}^{Y_C} = \partial M_D / \partial Y_C$  et sur le taux de variation du moment de traînée par rapport à la vitesse d'entrée  $s_{M_D}^U$  pour valider le calcul des sensibilités de paramètre et des dérivées de stabilité. Les résultats sont très positifs et valident avec confiance la méthode numérique des équations de sensibilité. Cette réussite n'est cependant qu'une première étape dans le processus de validation de la méthode pour la détermination des dérivées de stabilité d'un faisceau de cylindre. En effet, le régime étudié est un régime laminaire stationnaire à faible nombre de Reynolds ce qui se trouve être très loin des conditions réelles d'écoulement dans un générateur de vapeur des centrales nucléaires ( $R_e \approx 30000$ ). Il s'agit donc désormais d'étudier la configuration de cylindre pour un régime à plus haut nombre de Reynolds.



## CHAPITRE 7

### POUR ALLER PLUS LOIN

Ce chapitre présente très brièvement les prémices de résultats obtenus pour les simulations numériques faites en régime instationnaire. Après avoir exposé les équations de Navier-Stokes et de sensibilité en instationnaire, nous présenterons les premiers résultats obtenus pour un nombre de Reynolds de 200. Nous présenterons les problèmes rencontrés et les directions à prendre pour leur résolution.

#### 7.1 Équations pour l'écoulement et les sensibilités en régime instationnaire

##### 7.1.1 Équations pour le fluide

On modélise les écoulements instationnaires incompressibles visqueux à l'aide des équations de Navier-Stokes sous forme *Eulérienne* :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (7.1)$$

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (7.2)$$

Où  $\rho$  est la masse volumique du fluide,  $\mathbf{u}$ , le vecteur vitesse et  $\boldsymbol{\sigma}$  le tenseur des contraintes. Le code numérique CADYF calcule la dérivée  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$  par une méthode des différences finies :

$$\rho \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}|^{n+1} = -\nabla p|^{n+1} + \mu \nabla^2 \mathbf{u}|^{n+1} \quad (7.3)$$

$$\rho \frac{\mathbf{u}^{n+1}}{\Delta t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}|^{n+1} = -\nabla p|^{n+1} + \mu \nabla^2 \mathbf{u}|^{n+1} + \rho \frac{\mathbf{u}^n}{\Delta t} \quad (7.4)$$

Le calcul instationnaire se décompose donc en une série de calculs stationnaires pour chaque pas de temps, mais en prenant en compte l'état de l'écoulement au pas de temps précédent.

### 7.1.2 Équations de sensibilité

Les équations de sensibilité pour un écoulement instationnaire s'obtiennent en dérivant les équations 7.1 et 7.2 par rapport au paramètre d'intérêt  $a$  :

$$\nabla \cdot s_{\mathbf{u}} = 0 \quad (7.5)$$

$$\rho \left( \frac{\partial s_{\mathbf{u}}}{\partial t} + s_{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla s_{\mathbf{u}} \right) = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}' \quad (7.6)$$

et servent à décrire le comportement temporel de l'écoulement soumis à une perturbation du paramètre  $a$ .

## 7.2 Résultats à $R_e = 200$

Les résultats pour un nombre de Reynolds de 200 furent plutôt surprenant. En effet, on caractérise les problèmes instationnaires en utilisant le nombre de Strouhal  $S = fD/U$ , une mesure adimensionnelle de la fréquence de la réponse. Lorsque l'on déplace un cylindre, on modifie la géométrie du faisceau et par conséquence celui de l'écoulement qui le traverse, de sorte que le nombre de Strouhal devient une fonction

de la position du cylindre étudié. La fréquence d'oscillation de l'écoulement dépend donc de la position du cylindre ( $\omega = \omega(X_C, Y_C)$ ). Cette dépendance physique de la fréquence par rapport à la position du cylindre, entraîne un comportement non-borné de la sensibilité calculée numériquement.

Afin d'expliquer ce problème numérique, considérons un écoulement se comportant de façon sinusoïdal et dont la fréquence dépend d'un paramètre  $a$  :

$$v = v_m \sin(\omega(a)t) \quad (7.7)$$

La sensibilité de  $v$  par rapport à  $a$  est alors :

$$s_v^a = \frac{\partial v}{\partial a} = t \frac{\partial \omega}{\partial a} v_m \cos(\omega t) \quad (7.8)$$

La dépendance en  $a$  de la fréquence  $\omega(a)$  fait apparaître le temps dans le terme de la sensibilité. Ce comportement de la sensibilité est donc une caractéristique intrinsèque à la mathématique des sensibilités.

Ainsi, alors que l'écoulement se comporte de façon périodique dans le temps avec une période  $T$ , la MES ne nous donne pas de sensibilité périodique :

$$s_v^a(t) = t \frac{\partial \omega}{\partial a} v_m \cos(\omega t) \quad (7.9)$$

$$s_v^a(t + T) = (t + T) \frac{\partial \omega}{\partial a} v_m \cos(\omega t) \quad (7.10)$$

Mathématiquement, d'une période à l'autre, nous avons donc un écart pour la sensibilité de :

$$s_v^a(t + T) - s_v^a(t) = T \frac{\partial \omega}{\partial a} v_m \cos(\omega t) \quad (7.11)$$

Cet écart entre la sensibilité  $s_v^a$  au temps  $t$  et celle au temps  $t + T$  ne représente

donc pas un phénomène physique mais une limite du modèle des sensibilités. Il s'agit donc de trouver un moyen de s'en débarrasser.

Ce problème de calcul numérique est typique de la composante  $v$  de la vitesse dans les allées de tourbillons de Von Karman générées par un écoulement autour d'un cylindre<sup>[19, 20]</sup>.

Aucune solution complète n'a pour l'instant été trouvée pour pallier à ce problème, cependant des idées ont déjà émergées :

- Trouver une façon de définir un horizon fini où l'on limiterait le temps  $t$  inférieur à un temps critique de sorte que l'on pourrait annuler le terme non-borné dans le temps.
- Utiliser la méthode adjointe <sup>[39]</sup> à la place des équations de sensibilité.
- Étudier le comportement du fluide en passant par le domaine fréquentiel.

## CONCLUSION

Comme nous l'avons vu, l'étude des facteurs d'influence d'une configuration de cylindre se traduit, dans la théorie d'instabilité fluide-élastique, par l'étude des coefficients de force et leurs dérivées par rapport aux déplacements des cylindres. Ces coefficients et dérivées sont habituellement déterminés de façon expérimentale. Ces opérations nécessitant des installations lourdes à budget élevé, il peut être intéressant de regarder si les méthodes numériques peuvent se substituer à elles. Le but de ce mémoire était de valider la méthode des équations de sensibilité pour la détermination des facteurs d'influence d'un faisceau de cylindre dans un écoulement transverse à bas régime.

Comme nos travail l'indique, la Méthode des Équations de Sensibilité pourrait être un outil prometteur puisqu'elle nous permet d'obtenir les dérivées des variables d'écoulement par rapport à un paramètre d'intérêt. Nous pouvons alors nous en servir pour obtenir les dérivées de stabilité, *i.e.* les dérivées des coefficients de force par rapport aux déplacements des cylindres.

Nous avons effectué des simulations numériques d'un écoulement laminaire ( $R_e = 20$ ) au travers d'un faisceau de cylindre en configuration triangle tourné  $60^\circ$ . La MES nous a permis d'obtenir les coefficients de force et leurs sensibilités. Une méthode d'éléments finis adaptative, raffinant simultanément en fonction des erreurs de discrétisation, d'écoulement et de la géométrie, a produit des maillages assez fins permettant l'obtention de solutions suffisamment précises .

Pour valider ces valeurs, nous avons conçu un montage expérimental reproduisant la configuration de cylindre étudiée numériquement et qui nous permet de mesurer les forces induites par l'écoulement sur le cylindre central. Pour reproduire les conditions d'écoulement de la simulation numérique, nous avons utilisé de la glycé-

rine car sa viscosité élevée et la pression générée par la colonne de glycérine permet d'obtenir une vitesse d'écoulement et des forces faciles à mesurer. Ce système est doté d'un guidage linéaire dans la direction de l'écoulement et dans la direction transversale permettant de déplacer le cylindre central dans chaque direction afin de mesurer les dérivées de stabilité pour valider le code numérique.

Une campagne d'essais répétés trois fois assura la bonne répétabilité des forces mesurées.

Les comparaisons de ces résultats avec les valeurs numériques révéla un écart de plus de 18% entre la mesure de la force de trainée et celle donné par la simulation numérique. Une étude plus approfondie du comportement réel 3-D de l'écoulement dans la section d'essai nous a permis de revoir notre modèle numérique. Le profil de vitesse développé et donc non-uniforme dans toutes les directions se trouve être responsable de cet écart. Afin de se rapprocher de la valeur expérimentale, nous avons donc été contraint de créer un modèle dit 2.5-D qui consiste à reconstruire par tranche non plus l'effort mais le moment 3-D subit par le cylindre. Ce nouveau modèle théorique, alliant le calcul analytique du profil de vitesse dans la section  $(y, z)$  et le calcul numérique des coefficients de forces suivant  $z$ , nous a permis de nous rapprocher de façon conséquente de la valeur expérimental de la trainée, pour ne laisser un écart que de 2.7% avec la valeur numérique. Concernant les sensibilités, les mesures de la sensibilité du moment de portance suivant  $Y_C$  furent les plus concluantes donnant un écart avec la valeur numérique de 5%. Nous avons pu aussi valider les sensibilité de paramètre en regardant l'évolution du moment de trainée avec la vitesse. La mesure expérimentale s'approchant à 5.7% près de la valeur numérique. La méthode des équations de sensibilité regorge d'intérêts autres que pour le calcul des dérivées de stabilité. Ainsi nous avons pu prévoir les écoulements pour des géométries voisines en utilisant la méthode des états voisins, nous permettant d'obtenir les évolutions des coefficients de force pour de petits

déplacement du cylindre central. Les sensibilités nous ont aussi permis de faire une analyse d'incertitude qui nous a été très utile lors des comparaisons avec les valeurs expérimentales.

Ces comparaisons semblent donc positives, nous permettant de conclure que les mesures expérimentales viennent valider les résultats obtenus par la méthode des équations de sensibilité. Cette validation s'est faite pour des écoulements laminaires à bas nombre de Reynolds, incompressibles, stationnaires. Or, comme nous l'avons vu, les applications réelles de l'étude des dérivées de stabilité se fait à beaucoup plus haut nombre de Reynolds. Il semble donc indispensable d'augmenter ce dernier pour se rapprocher un peu plus de la réalité.

Des simulations numériques en instationnaire à nombre de Reynolds  $R_e = 200$  ont été effectuées. Les résultats ne furent pas ceux attendus. Le comportement non-borné des sensibilités provient de l'essence même des équations de sensibilité. Il faut donc trouver une façon de venir limiter les facteurs responsables de ce problème ou d'utiliser une méthode différente lorsque nous nous trouvons dans ce genre de cas.

Pour conclure, nous pouvons dire que la première étape de validation des équations de sensibilité, pour un écoulement à faible nombre de Reynolds est une réussite et est encourageant pour la suite. Beaucoup de défis restent cependant à être relevés si l'on veut atteindre le but final de validation du code dans les conditions réelles d'écoulement. Une fenêtre sur les méthodes numériques dans la détermination des dérivées de stabilité s'est entre-ouverte, il va falloir pousser plus loin.

## RÉFÉRENCES

- [1] Balsa, T. (1977). Potential flow interactions in an array of cylinders in cross-flow. *Journal of Sound and Vibration*, **50**, 285–303.
- [2] Blevins, R. (1974). Fluidelastic whirling of a tube row. *ASME journal of Pressure Vessel Technology*, **96**, 263–267.
- [3] Blevins, R. D. (1977). *Flow-Induced Vibration*. Van Nostrand Reinhold, New York.
- [4] Borggaard, J. and Verma, A. (2001). On efficient solutions to the continuous sensitivity equation using automatic differentiation. *SIAM, Journal on Scientific Computing*, **22**(1), 39–62.
- [5] Chen, S. (1975). Vibration of nuclear fuel bundles. *Nuclear Engineering and Design*, **35**, 392–422.
- [6] Chen, S. (1983a). Instability mechanisms and stability criteria of a group of circular cylinders subjected to cross-flow. part i : Theory. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, **105**, 463–518.
- [7] Chen, S. (1983b). Instability mechanisms and stability criteria of a group of circular cylinders subjected to cross-flow. part ii : Numerical results and discussion. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, **105**, 253–560.
- [8] Chen, S. (1986). A general theory for dynamic instability of tube arrays in crossflow. *Journal of Fluids and Structures*, **1**, 35–53.
- [9] Connors, H. (1970). Fluidelastic vibration of tube arrays excited by cross flow. In *Flow induced vibration in Heat Exchangers*, New York : ASME.
- [10] Dalton, C. and Helfinstine, R. (1971). Potential flow past a group of circular cylinders. *ASME journal of basic engineering*, **93**, 636–642.



- [11] Davis, T. (2004). Algorithm 832 : Umfpack v4.3, an unsymmetric-pattern multifrontal method. *ACM Trans. Math. Softw.*, **30**(2), 196–199.
- [12] Dhatt, G. and Touzot, G. (1981). Une présentation de la méthode des éléments finis.
- [13] Duvigneau, R. and Pelletier, D. (2004). On the accuracy of shape parameter boundary conditions in the sensitivity equation method. In *43rd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, NV. AIAA Paper 2005-0127.
- [14] Duvigneau, R. and Pelletier, D. (2006). On accurate boundary conditions for a shape sensitivity equation method. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **50**, 147–164.
- [15] Edmond, P., Pelletier, D., Etienne, S., Hay, A., and Borggaard, J. (2006). Application of a sensitivity equation method to compressible subsonic impinging jets. In *44th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, NV. AIAA Paper 2006-0909.
- [16] Elliott, J. and Herling, W. (2000). A chimera approach to aerodynamic shape optimization for the compressible, high-re navier-stokes equations. *8th AIAA/USAF/NASA/ISSMA Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization*.
- [17] Haug, E. J., Choi, K. K., and Komkov, V. (1986). *Design sensitivity analysis of structural systems*, volume 177 of *Mathematics in science and engineering*. Academic Press, Orlando.
- [18] Hay, A., Etienne, S., Duvigneau, R., and Pelletier, D. (2006). Evaluation of flows on nearby geometries by a shape sensitivity equation method. In *44th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, NV. AIAA Paper 2006-1296.
- [19] Hristova, H., Étienne, S., Pelletier, D., and J., B. (2006). A continuous sensitivity equation method for time-dependent incompressible laminar flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **50**(7), 817–844.

- [20] Ilinca, F., Pelletier, D., and Borggaard, J. (2007). A continuous second-order sensitivity equation method for time-dependent incompressible laminar flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **55**(6), 565–587.
- [21] Pagaldipti, N. and Chattopadhyay, A. (1994). A discrete semi-analytical procedure for aerodynamic sensitivity analysis including grid sensitivity. *5th AIAA/USAF/NASA/ISSMA Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization*, pages 161–169.
- [22] Paidoussis, M. and et al. (1984). A potential flow theory for the dynamics of cylinder arrays in cross-flow. *Journal of Fluid Mechanics*, **146**, 227–252.
- [23] Paidoussis, M. P. (2006). Real-life experiences with flow-induced vibration. *Journal of Fluids and Structures*, **22**, 741–755.
- [24] Price, S. (1995). A review of theoretical models for fluidelastic instability of cylinder arrays in cross-flow. *Journal of Fluids and Structures*, **9**, 463–518.
- [25] Price, S. and Paidoussis, M. P. (1983). Fluidelastic instability of an infinite double row of circular cylinder subject to a uniform cross-flow. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, **105**(1), 59–66.
- [26] Price, S. and Paidoussis, M. P. (1984a). An improved mathematical model for the stability of cylinder rows subject to cross-flow. *Journal of Sound and Vibration*, **97**(4), 615–640.
- [27] Price, S. and Paidoussis, M. P. (1984b). Theoretical investigation of the fluidelastic instability of a single flexible cylinder surrounded by rigid cylinders. *Symposium Flow Induced Vibrations, Volume 2*, pages 117–133.
- [28] Price, S. and Paidoussis, M. P. (1986a). A constrained-mode analysis of the fluidelastic instability of a double row of flexible circular cylinder subject to cross-flow : a theoretical investigation of system parameters. *Journal of Sound and Vibration*, **105**(1), 121–142.

- [29] Price, S. and Paidoussis, M. P. (1986b). A single flexible cylinder analysis for the fluidelastic instability of an array of flexible cylinders in cross-flow. *Journal of Fluids Engineering*, **108**, 193–199.
- [30] Price, S., Paidoussis, M. P., and Giannias, N. (1988). A generalized constrained-mode analysis for cylinder arrays in cross-flow. *International Symposium on Flow-Induced Vibration and Noise : Flow-Induced Vibration and Noise in Cylinder Arrays. ASME Conference New York, NY, USA*, pages 25–55.
- [31] Roache, P. J. (1998). *Verification and Validation in Computational Science and Engineering*. Hermosa publishers, Albuquerque, NM.
- [32] Roberts, B. (1962). *Low frequency, self-excited vibration in a row of circular cylinders mounted in an airstream*. PhD thesis, University of Cambridge.
- [33] Roberts, B. (1966). Low frequency, aeroelastic vibrations in a cascade of circular cylinders. *I. Mech. E. Mechanical Engineering Science Monograph*, (4).
- [34] Simpson, A. and Flower, J. W. (1977). An improved mathematical model for the aerodynamic forces on tandem cylinders with aeroelastics applications. *Journal of Sound and Vibration*, **51**, 183–217.
- [35] Tanaka, H. and Takahara, S. Fluidelastic vibration of tube array in cross-flow. *Journal of Sound and Vibration*, **77**.
- [36] Tanaka, H. and Takahara, S. Unsteady fluid dynamic force on tube bundle and its dynamic effect on vibration. *Flow-Induced Vibration of Power Plant Components - PVP New York ASME*, **41**.
- [37] Tanaka, H., Takahara, S., and Ohta, K. Flow-induced vibration of tube arrays with various pitch-to-diameter ratios. *ASME Journal of Pressure Vessel Technology*, **104**.
- [38] Taylor, A. I., Hou, G., and Korivi, V. (1991). A methodology for determining aerodynamic sensitivity derivatives with respect to variation of geometric shape.

- In *32nd AIAA Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*. AIAA Paper 1191-1101.
- [39] Turgeon, E. (2001). *Méthode d'Éléments Finis Adaptative pour la Résolution des Sensibilités d'écoulements*. PhD thesis, École Polytechnique de Montréal, Montréal, QC.
- [40] Turgeon, É., Pelletier, D., and Borggaard, J. (2001). Sensitivity and uncertainty analysis for variable property flows. In *39th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, NV. AIAA Paper 2001-0139.
- [41] Watteaux, R., Pelletier, D., Etienne, S., and Mureithi, N. (2008). Determination of a fluidelastic instability domain using the shape sensitivity equation method. In *46th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, NV. AIAA Paper 2008-96740.
- [42] Whiston, G. and Thomas, G. (1982). Whirling instabilities in heat exchanger tube arrays. *Journal of Sound and Vibration*, **81**, 1–30.
- [43] Zienkiewics, O.C. and Zhu, J. (1992). The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimate, part 1 : the recovery technique. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, (33), 1331–1364.
- [44] Zienkiewics, O. and Zhu, J. (1992). The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimate, part 2 : Error estimates and adaptivity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, (33), 1365–1382.

## ANNEXE I

### COEFFICIENTS DES MATRICES $\bar{C}_F$ ET $\bar{K}_F$

#### I.1 Coefficients de la matrice d'amortissement du fluide $\bar{C}_f$

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= -2C_{D0} \\
 C_{22} &= -C_{D0} \\
 C_{33} &= -2C_{D0} \\
 C_{44} &= -C_{D0}
 \end{aligned}
 \tag{I.1}$$

Les autres termes de la matrice d'amortissement du fluide sont égaux à zéro.

#### I.2 Coefficients de la matrice de rigidité du fluide $\bar{K}_f$

Nous négligeons les termes d'ordre 2.

$$\begin{aligned}
K_{11} &= \frac{\partial C_D}{\partial x_C} + ge^{-i\theta_x}(1 + \tau\lambda)\frac{\partial C_D}{\partial x_1} + ge^{i\theta_x}(1 + \tau\lambda)\frac{\partial C_D}{\partial x_4} \\
K_{12} &= 0 \\
K_{13} &= g(1 + \lambda\tau)(1 + e^{i\Phi_x}) \left[ e^{-i\theta_x}\frac{\partial C_D}{\partial x_2} + \frac{\partial C_D}{\partial x_3} \right] \\
K_{14} &= ge^{-i\theta_y}(1 - e^{i\Phi_y}) \left[ T\lambda/U_G \frac{\partial C_D}{\partial x_2} + (1 - L\lambda/U_G)\frac{\partial C_D}{\partial y_2} \right] + g(1 - e^{i\Phi_y})\frac{\partial C_D}{\partial y_3} \\
K_{21} &= 0 \\
K_{22} &= \frac{\partial C_L}{\partial y_C} + ge^{-i\theta_y}(1 - 2L\lambda/U_G)\frac{\partial C_L}{\partial y_1} + 2\lambda/U_G \left[ T\frac{\partial C_L}{\partial x_3} + L\frac{\partial C_L}{\partial y_3} \right] \\
&\quad + (ge^{i\theta_y} + 2L\lambda/U_G)\frac{\partial C_L}{\partial y_4} \\
K_{23} &= g(1 + \lambda\tau)(1 - e^{i\Phi_x}) \left[ e^{-i\theta_x}\frac{\partial C_L}{\partial x_2} + \frac{\partial C_L}{\partial x_3} \right] \\
K_{24} &= ge^{-i\theta_y}(1 + e^{i\Phi_y}) \left[ T\lambda/U_G \frac{\partial C_L}{\partial x_2} + (1 - L\lambda/U_G)\frac{\partial C_L}{\partial y_2} \right] \\
&\quad + g(1 + e^{i\Phi_y})\frac{\partial C_L}{\partial y_3} \\
K_{31} &= g(1 + \lambda\tau)(1 + e^{-i\Phi_x}) \left[ \frac{\partial C_D}{\partial x_2} + e^{i\theta_x}\frac{\partial C_D}{\partial x_3} \right] \\
K_{32} &= g(e^{-i\Phi_y} - 1) \left\{ \left[ T\lambda/U_G \frac{\partial C_D}{\partial x_2} + (1 - L\lambda/U_G)\frac{\partial C_D}{\partial y_2} \right] + e^{i\theta_y}\frac{\partial C_D}{\partial y_3} \right\} \\
K_{33} &= \frac{\partial C_D}{\partial x_C} + g(1 + \lambda\tau) \left[ e^{-i\theta_x}\frac{\partial C_D}{\partial x_1} + e^{i\theta_x}\frac{\partial C_D}{\partial x_4} \right] \\
K_{34} &= 0 \\
K_{41} &= g(1 + \lambda\tau)(e^{-i\Phi_x} - 1) \left[ \frac{\partial C_L}{\partial x_2} + e^{i\theta_x}\frac{\partial C_L}{\partial x_3} \right] \\
K_{42} &= g(e^{-i\Phi_y} + 1) \left\{ \left[ T\lambda/U_G \frac{\partial C_L}{\partial x_2} + (1 - L\lambda/U_G)\frac{\partial C_L}{\partial y_2} \right] + e^{i\theta_y}\frac{\partial C_L}{\partial y_3} \right\} \\
K_{43} &= 0 \\
K_{44} &= \frac{\partial C_L}{\partial y_C} + ge^{-i\theta_y}(1 - 2L\lambda/U_G)\frac{\partial C_L}{\partial y_1} + 2\lambda/U_G \left[ T\frac{\partial C_L}{\partial x_3} + L\frac{\partial C_L}{\partial y_3} \right] \\
&\quad + (ge^{i\theta_y} + 2L\lambda/U_G)\frac{\partial C_L}{\partial y_4}
\end{aligned} \tag{I.2}$$

## ANNEXE II

### ÉVALUATION RAPIDE D'ÉTATS VOISINS

#### II.1 Méthode d'interpolation pour la détermination des états voisins

Une autre utilité des sensibilités est de prédire le comportement de l'écoulement pour une configuration géométrique voisine sans avoir à refaire de simulation numérique. Pour ce faire nous utilisons un développement de Taylor dans l'espace des paramètres  $a$ . Soit  $\Gamma(a_0)$  la courbe géométrique de l'état de référence et  $\Gamma(a_0 + \Delta a)$  la courbe géométrique de l'état voisin. Avec  $\Phi$  la solution d'une des variables de l'écoulement pour la courbe référence  $\Gamma(a_0)$ , sa valeur à  $\Gamma(a_0 + \Delta a)$  est obtenue par développement linéaire en série de Taylor :

$$\Phi(\hat{X}, a_0 + \Delta a) \approx \Phi(\hat{X}, a_0) + \Delta a \frac{D\Phi}{Da}(\hat{X}, a_0) \quad (\text{II.1})$$

Toute quantité d'intérêt définie sur la courbe requiert l'usage de la dérivée Lagrangienne car on étudie le changement de  $\Phi$  causé par  $a$  sur une courbe dont la géométrie change avec  $a$ . Les quantités définies à l'intérieur du domaine s'obtiennent alors avec la dérivée partielle (Eulérienne) car nous regardons le comportement de l'écoulement à un point fixe de l'espace. La vitesse, pour la configuration voisine, est donc calculée comme suit :

$$u(\hat{X}, a_0 + \Delta a) \approx u(\hat{X}, a_0) + \Delta a \cdot s_u^a \quad (\text{II.2})$$

Comme les coefficients de forces  $C_D$  et  $C_L$  dépendent de la géométrie de la frontière du cylindre (position, forme) définie par nos paramètres de sensibilités, nous devons

utiliser les dérivées matérielles :

$$\int_{\Gamma(a_0+\Delta a)} [\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}}]_{a_0+\Delta a} d\Gamma = \int_{\Gamma(a_0+\Delta a)} \left[ \boldsymbol{\sigma} + \Delta a \frac{D\boldsymbol{\sigma}}{Da} \right]_a \hat{\mathbf{n}} d\Gamma$$

Nous ne connaissons pas la position du cylindre déplacé, nous ne pouvons donc pas intégrer le terme de contrainte suivant la courbe perturbée  $\Gamma(a_0 + \Delta a)$ . Nous pouvons toujours nous remettre à la courbe de référence fixe :

$$\Gamma(a_0 + \Delta a) \approx \Gamma(a_0)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma(a_0+\Delta a)} [\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}}]_{a_0+\Delta a} d\Gamma &\approx \int_{\Gamma(a_0)} [\boldsymbol{\sigma} \hat{\mathbf{n}}]_a d\Gamma \\ &+ \Delta a \int_{\Gamma(a_0)} \left[ \left( \boldsymbol{\sigma}' + \nabla \boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{X}}}{\partial a} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}} \right]_a d\Gamma \end{aligned} \quad (\text{II.3})$$

Les coefficients des forces agissants sur le cylindre déplacé sont alors (par exemple pour la portance) :

$$C_L(a_0 + \Delta a) \approx C_L(a_0) + \Delta a \cdot \frac{DC_L}{Da} \quad (\text{II.4})$$

Afin de vérifier la réponse donnée par la méthode des états voisins (cela nous donne par ailleurs une autre méthode de vérification de la bonne valeur des sensibilités), nous avons effectué des simulations pour une série de géométries représentant la configuration de cylindres avec le cylindre central à diverses valeurs de  $Y_C$  et  $X_C$ . Nous comparons ici les iso-lignes obtenues par la méthode des états voisins à celles extraites de la simulation de l'écoulement sur la géométrie voisine. Pour un déplacement de 2% du diamètre  $D$  du cylindre, l'approximation par série de Taylor donne de façon assez fidèle la réponse donnée par la nouvelle simulation. Les figures



II.1 exposent ce résultat. Malgré le décalage de  $X_C$  ou  $Y_C$  du cylindre central, les iso-lignes des deux méthodes se superposent parfaitement, ce qui dénote alors un comportement linéaire de l'écoulement, et une faible influence du changement de position de la courbe  $\Gamma$  du cylindre dans cet intervalle de déplacement.

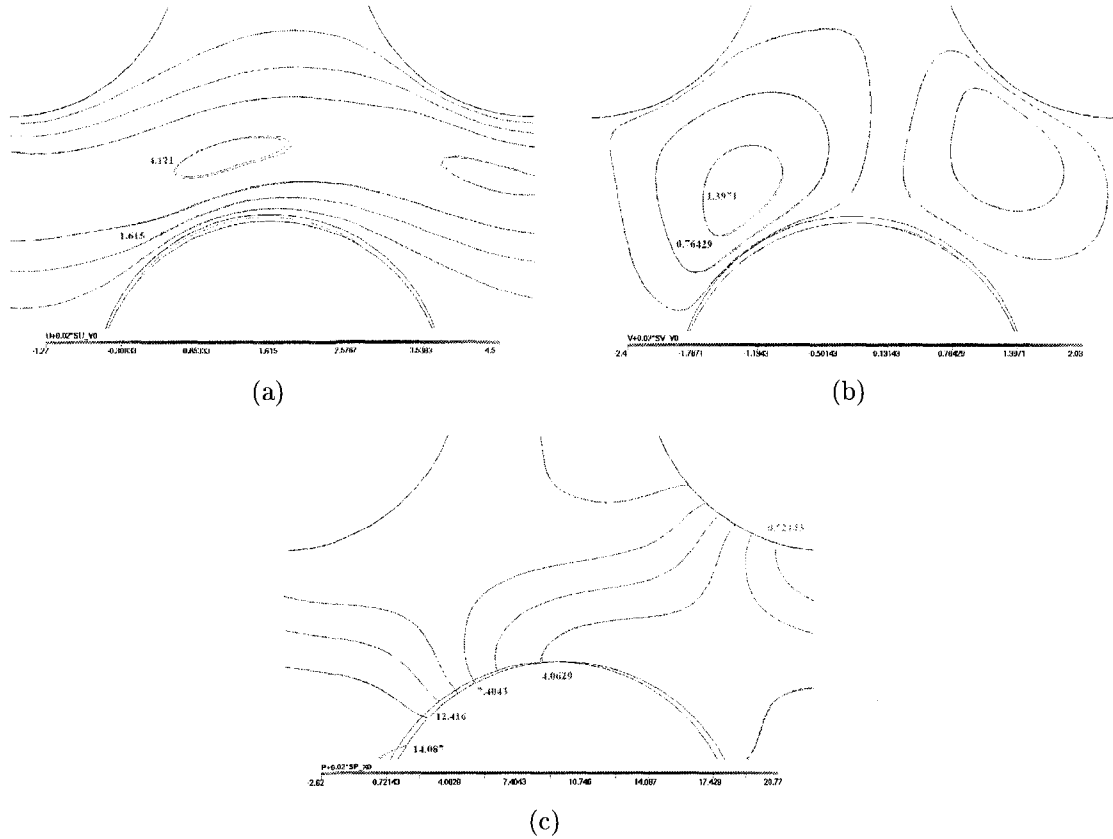


FIG. II.1 Comparaison des iso-lignes entre l'interpolation par série de Taylor et la nouvelle analyse

(a) iso-lignes  $u$  avec  $a = Y_C$  (b) iso-lignes  $v$  avec  $a = Y_C$  (c) iso-lignes  $P$  avec  $a = X_C$ .

Pour un déplacement de 5% de  $D$ , la superposition des iso-lignes n'est pas aussi bonne mais nous permet quand même d'obtenir des valeurs acceptables des forces.

Les forces sont calculées de deux façons : la méthode des états voisins et des simulations en bonne et due forme pour des déplacements de  $Y_C$  et  $X_C$  variant de 0 à 20% du diamètre  $D$  du cylindre central. Les figures II.2 et II.3 montre les évo-

lutions des coefficients de forces selon la position du cylindre central trouvées par nouvelle analyse (courbe non-linéaire) et par méthode des états voisins (droite de sensibilité).

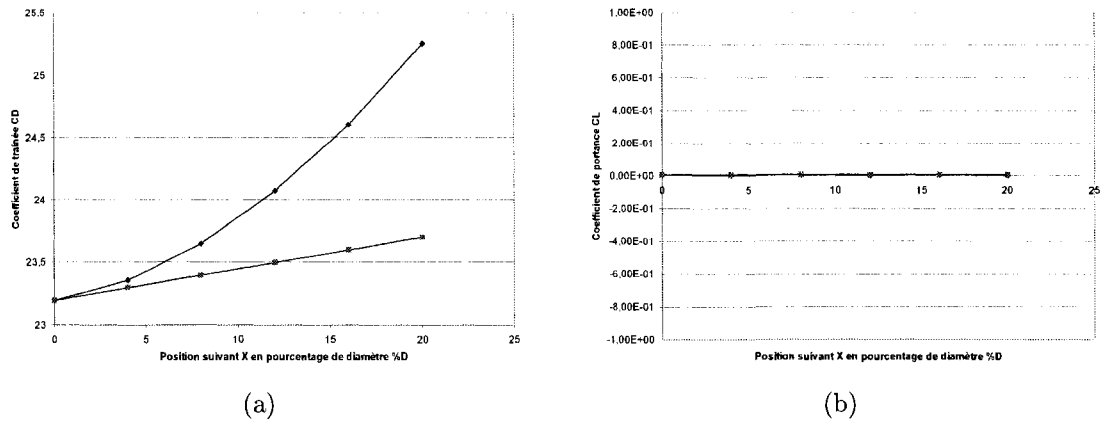


FIG. II.2 Évolution de  $C_D$  et  $C_L$  pour un déplacement longitudinal X  
(a)  $C_D$  (b)  $C_L$ .

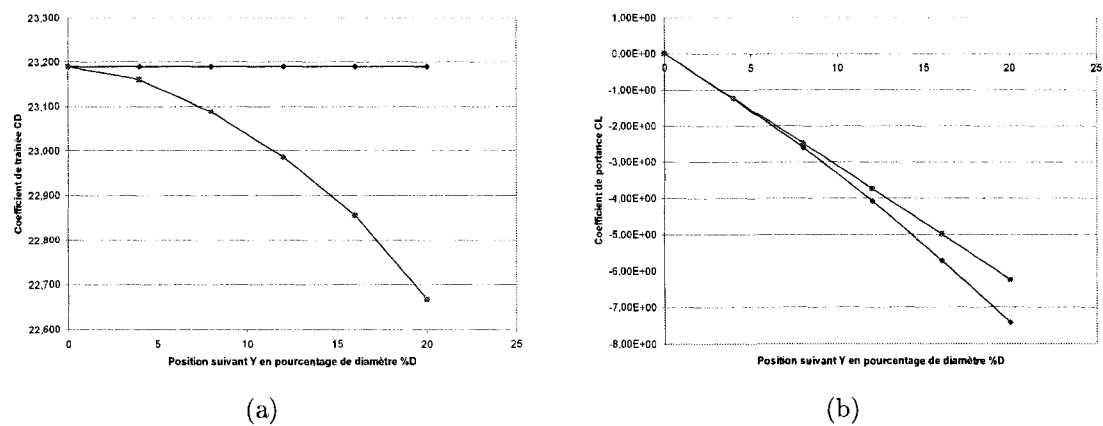


FIG. II.3 Évolution de  $C_D$  et  $C_L$  pour un déplacement transversal Y  
(a)  $C_D$  (b)  $C_L$ .

L'erreur relative entre l'extrapolation au premier ordre par série de Taylor et la nouvelle simulation sont données par les Tables II.1 et II.2.

Déplacement	$C_D$	$C_D$	Erreur
$X_C/D$	simulation	série Taylor	relative
4%	23.35	23.29	0.25%
8%	23.64	23.39	1%
12%	24.06	23.49	2%
16%	24.60	23.59	4%
20%	25.25	23.69	6%

TAB. II.1 Erreur relative sur  $C_D$  pour un déplacement suivant X

Déplacement	$C_L$	$C_L$	Erreur
$Y_C/D$	simulation	série Taylor	relative
4%	-1.26	-1.25	1%
8%	-2.60	-2.50	4%
12%	-4.08	-3.75	8%
16%	-5.72	-5.00	12%
20%	-7.43	-6.25	16%

TAB. II.2 Erreur relative sur  $C_L$  pour un déplacement suivant Y

Ainsi, l'approximation des états voisins est plutôt bonne pour prédire les tendances de l'écoulement et des forces induites pour des perturbations atteignant environ 12% du diamètre  $D$ . Au delà de ce pourcentage de déplacement une série de Taylor à l'ordre 2 semble nécessaire.

Grâce à l'évaluation rapide des états voisins, il est aussi possible d'obtenir avec une seule simulation, une série d'écoulements permanents correspondant aux différentes configurations géométriques. Bien sur, cette méthode s'applique pour n'importe quel paramètre  $a$ . Dans cet exemple-ci, nous n'avons bougé qu'un seul cylindre, il peut cependant être intéressant de regarder si la prédiction marche pour le déplacement de plusieurs cylindres en même temps.

### II.1.1 Application à l'écoulement autour d'un faisceau de tubes flexibles

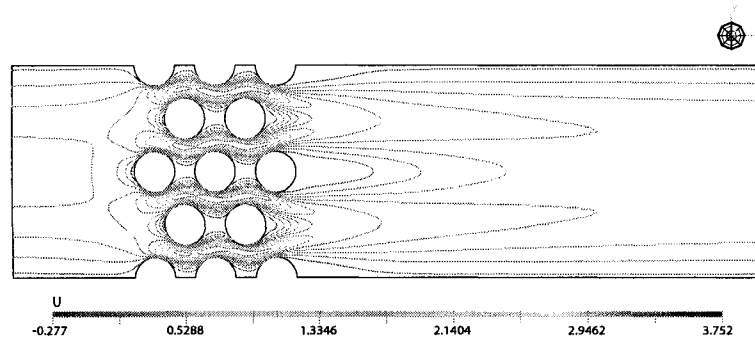
Il est possible de connaître l'influence simultanée de plusieurs paramètres sur un écoulement en regardant indépendamment l'influence de chacun de ces paramètres sur cet écoulement. Nous pouvons ainsi connaître la solution pour des états voisins caractérisés par la perturbation de plusieurs paramètres à l'aide d'un développement de Taylor d'ordre 1. Pour notre configuration de 7 cylindres, nous avons :

$$\Phi(a_1 + \delta a_1, \dots, a_i + \delta a_i, \dots, a_7 + \delta a_7) = \Phi(a_1, \dots, a_i, \dots, a_7) + \sum_{i=1, C}^7 \delta a_i s_{\Phi}^{a_i} \quad (\text{II.5})$$

Si les amplitudes de déplacement des différents cylindres ( valeur de  $\delta a$  ) ainsi que leurs phases ( en phase ou en opposition de phase via le signe de  $\delta a$  ), sont connus et petits, il est possible d'obtenir une estimation des dérivées de stabilité pour cette configuration perturbée ainsi que des estimations du comportement de l'écoulement. Par exemple, si nous considérons les cylindres 3 et 5 flexibles, la vitesse  $u$  induite par un déplacement  $\delta a_3$  du cylindre 3 et  $\delta a_5$  du cylindre 5 sera :

$$u(a_3 + \delta a_3, a_5 + \delta a_5) = u(a_3, a_5) + \delta a_3 s_{\Phi}^{a_3} + \delta a_5 s_{\Phi}^{a_5} \quad (\text{II.6})$$

Certaines instabilités de cylindre se traduisent dans la réalité par une vibration uniforme de tous les cylindres. Par exemple, la fig. II.4 montre l'évolution de l'écoulement lorsque les cylindres 3 et 5 se déplacent en phase et à la même amplitude ( $\delta a_3 = \delta a_5$ ).



a) iso-lignes configuration de référence

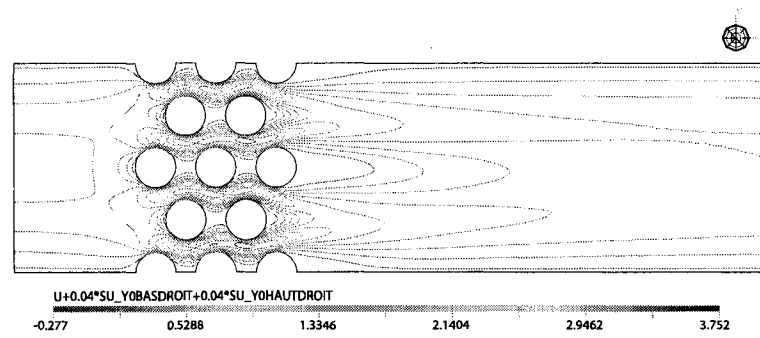
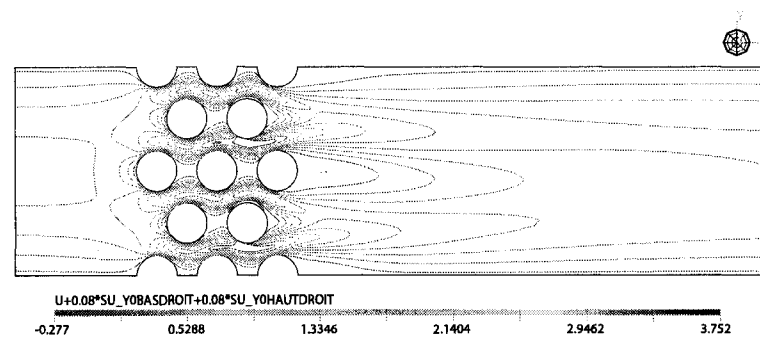
b) iso-U pour  $\delta a = 4\%D$ c) iso-U pour  $\delta a = 8\%D$ 

FIG. II.4 Effet d'un déplacement simultané des cylindres 3 et 5.

De la même façon les coefficients de forces évoluent selon le déplacement des deux cylindres. Ici, avec des conditions de déplacements identiques nous avons :

$$C_L(a_3 + \Delta a_3, a_5 + \Delta a_5) = C_L(a_3, a_5) + \Delta a \left( \frac{DC_L}{Da_3} + \frac{DC_L}{Da_5} \right) \quad (\text{II.7})$$

$$C_D(a_3 + \Delta a_3, a_5 + \Delta a_5) = C_D(a_3, a_5) + \Delta a \underbrace{\left( \frac{DC_D}{Da_3} + \frac{DC_D}{Da_5} \right)}_{\frac{DC_D}{Da_{tot}}} \quad (\text{II.8})$$

Les dérivées de stabilité seront donc différentes pour des configurations à un seul ou plusieurs cylindres flexibles. La méthode des états voisins demeure une approximation au premier ordre et ne prend donc pas en compte le couplage entre les déplacements des cylindres se traduisant mathématiquement par les dérivées croisées  $\partial C / \partial a_3 \partial a_5$ . Afin de s'assurer que nous obtenons quand même une solution raisonnable, et donc que le couplage entre les deux déplacements est faible, nous avons effectué une simulation numérique en prenant comme paramètre de forme  $a = [a_3, a_5]$ . Nous obtenons alors le comportement de l'écoulement pour une perturbation de  $\delta a = [\delta a_3, \delta a_5]$  soit pour une perturbation simultanée des cylindres 3 et 5. Les forces et dérivées subies par le cylindre 3 calculées par série de Taylor et avec une nouvelle simulation, lorsque le couple de cylindre (3,5) est flexible, sont données dans la table II.3. Nous exposons aussi ces mêmes résultats lorsque seul le cylindre 3 est flexible.

On remarque que l'approximation est très précise, le couplage résultant du mouvement entre les deux cylindres est donc très faible. De plus nous constatons que le cylindre 3 ne réagit pas de la même façon lorsqu'il est le seul à être flexible et lorsque les cylindres 3 et 5 sont flexibles.

Dérivées de stabilité	cylindre 3 flexible	cylindres 3 et 5 flexibles -série Taylor	cylindres 3 et 5 flexibles -simulation
$\frac{\partial C_{L3}}{\partial Y_{tot}}$	-37.44	-34.06	-34.06
$\frac{\partial C_{L3}}{\partial X_{tot}}$	8.48	-0.06	-0.04
$\frac{\partial C_{D3}}{\partial Y_{tot}}$	-1.28	-2.88	-2.90
$\frac{\partial C_{D3}}{\partial X_{tot}}$	4.66	12.36	12.34

TAB. II.3 Forces et dérivées de stabilité lorsque 3 est flexible et lorsque 3 et 5 sont flexibles.

Dans le cas d'un faisceau de cylindre entièrement flexible ayant la même phase et amplitude, l'approximation des dérivées de stabilité au premier ordre est aussi très bonne avec un couplage très faible. Les tableaux II.4 et II.5 donnent les valeurs trouvées par interpolation et par nouvelle analyse.

	$C_L$	$C_D$	$\frac{\partial C_L}{\partial Y_{tot}}$	$\frac{\partial C_D}{\partial Y_{tot}}$	$\frac{\partial C_L}{\partial X_{tot}}$	$\frac{\partial C_D}{\partial X_{tot}}$
Cylindre C	23.18	0,00	0,00	-9.62	0,60	0,00
Cylindre 1	16.98	0,00	0,00	-7.38	-0,20	0,00
Cylindre 2	22.92	-0,48	5.96	-18.64	3.80	10.62
Cylindre 3	23.96	0,00	7.90	-18.92	5.20	10.90
Cylindre 4	12.20	0,00	0,00	-2.78	-0,92	0,00
Cylindre 5	23.96	0,00	-7.90	-18.92	5.20	-10.90
Cylindre 6	23.92	0,48	-5.96	-18.64	3.80	-10.62

TAB. II.4 Forces et dérivées calculées par interpolation

Ainsi grâce aux équations de sensibilités et à la méthode des états voisins il est possible pour des petits déplacement de connaître l'évolution de l'écoulement et des forces sur chaque cylindre dans un faisceau de cylindres flexibles. Cette méthode peut être étendue à n'importe quelle configuration de cylindre flexible.

Les tableaux de II.6 à II.10 consignent la valeur des dérivées de stabilité de chaque cylindre de la configuration pour les déplacements du centre de chaque cylindre.

	$C_L$	$C_D$	$\frac{\partial C_L}{\partial Y_{tot}}$	$\frac{\partial C_D}{\partial Y_{tot}}$	$\frac{\partial C_L}{\partial X_{tot}}$	$\frac{\partial C_D}{\partial X_{tot}}$
Cylindre C	23.18	0,00	0,00	-9.60	0,66	0,00
Cylindre 1	16.98	0,00	0,00	-7.24	-0,20	0,00
Cylindre 2	22.92	-0,48	5.96	-18.60	3.84	10.62
Cylindre 3	23.96	0,00	7.94	-18.88	5.30	10.90
Cylindre 4	12.20	0,00	0,00	-2.80	-0,43	0,00
Cylindre 5	23.96	0,00	-7.94	-18.88	5.30	-10.92
Cylindre 6	23.92	0,48	-5.96	-18.62	3.84	-10.62

TAB. II.5 Forces et dérivées calculées par nouvelle analyse

	$\frac{\partial C_L}{\partial Y_C}$	$\frac{\partial C_D}{\partial Y_C}$	$\frac{\partial C_L}{\partial X_C}$	$\frac{\partial C_D}{\partial X_C}$
Cylindre C	0,00	-31,21	2,50	0,00
Cylindre 1	0,00	-0,16	10,20	0,00
Cylindre 2	6,04	2,03	-13,47	10,82
Cylindre 3	0,05	5,08	9,72	-2,26
Cylindre 4	0,00	5,73	-5,68	0,00
Cylindre 5	-0,05	5,08	9,72	2,26
Cylindre 6	-6,04	2,03	-13,47	-10,82

TAB. II.6 Coefficients de forces et sensibilités par rapport aux déplacement du cylindre central  $C$ 

On trouve les sensibilités des coefficients de force par rapport aux déplacement des autres cylindres par symétrie.



	$\frac{\partial C_L}{\partial Y_1}$	$\frac{\partial C_D}{\partial Y_1}$	$\frac{\partial C_L}{\partial X_1}$	$\frac{\partial C_D}{\partial X_1}$
Cylindre C	0,00	7,49	-5,82	0,00
Cylindre 1	0,00	-24,55	24,32	0,00
Cylindre 2	-2,10	7,16	9,53	-1,02
Cylindre 3	4,01	0,28	-0,54	1,51
Cylindre 4	0,00	0,92	-1,42	0,00
Cylindre 5	-4,01	0,28	-0,54	-1,51
Cylindre 6	2,10	7,16	9,53	1,02

TAB. II.7 Coefficients de forces et sensibilités par rapport aux déplacements du cylindre de gauche numéro 1

	$\frac{\partial C_L}{\partial Y_2}$	$\frac{\partial C_D}{\partial Y_2}$	$\frac{\partial C_L}{\partial X_2}$	$\frac{\partial C_D}{\partial X_2}$
Cylindre C	0,63	5,91	10,28	6,71
Cylindre 1	-2,01	9,08	-17,37	-6,62
Cylindre 2	-2,87	-29,76	5,68	8,47
Cylindre 3	2,15	8,16	-3,02	-0,40
Cylindre 4	-6,65	-1,54	-0,50	-0,63
Cylindre 5	-1,99	-2,71	0,93	-0,52
Cylindre 6	1,48	1,86	0,46	7,55

TAB. II.8 Coefficients de forces et sensibilités par rapport aux déplacements du cylindre 2

	$\frac{\partial C_L}{\partial Y_3}$	$\frac{\partial C_D}{\partial Y_3}$	$\frac{\partial C_L}{\partial X_3}$	$\frac{\partial C_D}{\partial X_3}$
Cylindre C	-6,98	0,32	-13,40	-6,73
Cylindre 1	0,33	-0,36	-0,01	-0,55
Cylindre 2	2,72	1,32	5,21	-1,52
Cylindre 3	-1,37	-37,54	4,67	8,48
Cylindre 4	-3,33	1,53	12,31	7,68
Cylindre 5	1,51	3,46	7,68	8,53
Cylindre 6	-2,70	-1,28	-3,59	-1,58

TAB. II.9 Coefficients de forces et sensibilités par rapport aux déplacements du cylindre 3

	$\frac{\partial C_L}{\partial Y_4}$	$\frac{\partial C_D}{\partial Y_4}$	$\frac{\partial C_L}{\partial X_4}$	$\frac{\partial C_D}{\partial X_4}$
Cylindre C	0,00	1,65	10,15	0,00
Cylindre 1	0,00	0,00	0,04	0,00
Cylindre 2	-0,03	0,03	-0,01	-0,14
Cylindre 3	1,58	4,34	-14,25	11,60
Cylindre 4	0,00	-9,40	-17,43	0,00
Cylindre 5	-1,59	4,34	-14,25	-11,60
Cylindre 6	0,03	0,03	-0,01	0,14

TAB. II.10 Coefficients de forces et sensibilités par rapport aux déplacement du cylindre 4

## ANNEXE III

### CONCEPTION

#### III.1 Calcul de résistance des matériaux pour les parois de la section d'essai

Deux vérifications ont été nécessaires afin de s'assurer de la solidité de la section d'essai. Il fallait s'assurer que le filetage des vis vissées dans les parois latérales en aluminium résisterait en cisaillement et il fallait s'assurer que la plaque d'acrylique supporterait la compression générée par les têtes de ces vis.

– **Calcul de la résistance en cisaillement des vis #6-32UNC de la plaque latéral en aluminium 6061T6 :**

La condition de non rupture du filetage soumis à une force  $F$  de cisaillement :

$$F < \pi dh\tau_R \quad (\text{III.1})$$

- $d$  est le diamètre du cylindre formé par le filetage, avec  $D$  le diamètre de la vis :

$$d = D - 1.226 \cdot (\text{pas de vis}) = 0.25 \text{ pouce} = 0.00253m \quad (\text{III.2})$$

- $h$  est la hauteur de connection entre le filet et le taraudage de la plaque, soit la profondeur de taraudage :  $h = 0.00635m$
- $\tau_R$  représente la contrainte de rupture en cisaillement pour un aluminium 6061T6 :  $\tau_R = 30000 \text{ PSI} = 206 \text{ MPa}$ .

La force de rupture est alors :

$$F_R = 3.1416 * 0.00253 * 0.00635 * 250.10^6 = 10346N \quad (III.3)$$

Les 16 vis de la plaque subissent la force exercée par la pression de la colonne de glycérine :

$$F_{vis} = \frac{\rho g H S}{16} \quad (III.4)$$

Où  $\rho$  est la densité de la glycérine,  $g$  la constante de gravité,  $H$  la hauteur de colonne de glycérine et  $S$  la surface de la plaque d'acrylique subissant la pression du liquide, donc :

$$F_{vis} = \frac{1243 * 9.81 * (125 * 0.0254) * (3.89 * 0.0254) * (5.98 * 0.0254)}{16} = 36N \quad (III.5)$$

Ce qui fait un coefficient de sécurité de  $s = \frac{F_R}{F_{vis}} = \frac{10346}{36} = 287$  et qui est amplement plus grand que le coefficient de sécurité admissible ( $s = 4$ ).

– **Calcul de résistance en compression de la plaque d'acrylique :**

La contrainte de compression en rupture de l'acrylique est  $\sigma_m = 15000 \text{ PSI} = 103 \text{ MPa}$ .

La pression interne due à la colonne de glycérine est reprise par les rondelles de vis #6, qui à leur tour font subir cette force à la plaque. La pression qu'une rondelle génère sur la plaque est donc :

$$P = \frac{F_{vis}}{S_{rondelle}} = \frac{37}{0.0009} = 152 \text{ kPa} = 0.15 \text{ MPa} \quad (III.6)$$

De la même façon, nous sommes bien en deçà de la compression admissible.

### III.2 Système de jauge et calibration

Le système de mesure utilisé se compose de 4 jauges de contraintes montées en demi-ponts de Wheaston. Deux caractéristiques sont importantes la préparation du système de mesure : la résistance et le facteur de jauge. Nous prenons ici des jauges EA-06-240LZ-120 dont ces caractéristiques sont :

- Résistance :  $120.0\Omega \pm 0.3\%$
- Facteur de jauge :  $2.045 \pm 0.5\%$

Les contraintes déforment les jauges, modifient donc la résistance de ces dernières et par conséquent change le voltage mesuré à leurs bornes. Il suffit donc de connaître le voltage induit des jauges en fonction de la force appliquée. Nous avons donc besoin de la valeur de la pente de la courbe Force vs. Voltage. Pour la calibration des cylindre creux sont utilisés, représentant une force uniformément répartie sur le cylindre flexible. La figure III.1 représente les jauges et la numérotation utilisée pour la calibration

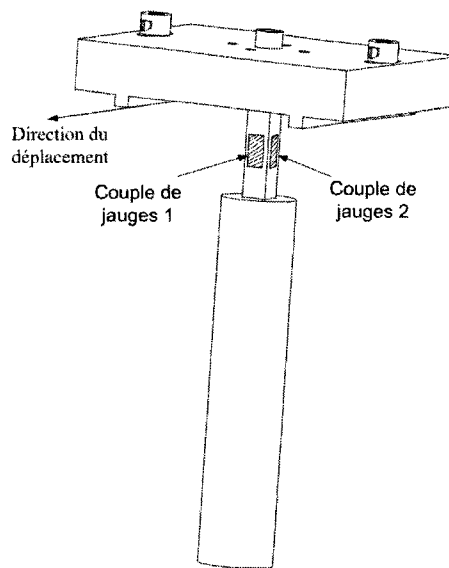


FIG. III.1 Schématisation des jauges de contrainte.

### III.2.1 Calibration de la force

Pour trouver la pente de la courbe  $F(V)$ , on a fixé le cylindre flexible dans un étau et on l'a mis de niveau. Plusieurs cylindres creux de poids différents mais connus ont été posés sur le cylindre flexible pour représenter une force uniforme. Le système d'acquisition Pimento 6.0 est utilisé pour lire le voltage associé aux jauges et le convertir en force en Newton. Plusieurs poids différents donnent une série de points représentant la courbe de comportement des jauges. La fig. III.2 donne le comportement du couple de jauges 1 lorsque les forces sont orientées suivant  $\vec{x}$ .

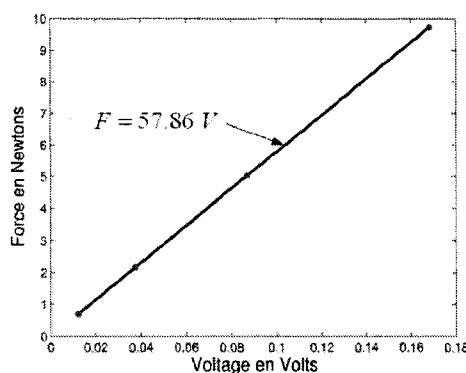


FIG. III.2 Force vs. Voltage pour le couple de jauges 1.

Cette droite donne donc quelle force correspond au voltage mesuré. En rentrant la valeur de sa pente dans PIMENTO, nous pouvons donc faire la conversion automatiquement lors des mesures :

- Couple de jauges 1 :  $S = 57.86 N/V$
- Couple de jauges 2 :  $S = 64.12 N/V$

Le couplage entre les jauges étant négligeable, la force mesurée est donc la force réellement subie par le cylindre flexible.

### III.2.2 Calibration du moment

Pour trouver la pente de la droite du moment par rapport au voltage, le cylindre flexible a été fixé dans un étau et mis de niveau. Nous nous sommes ensuite placés à  $L = 3$  pouces des jauges de contrainte. Les sensibilités sont alors :

- Couple de jauges 1 :  $S = 3.65 N/V$
- Couple de jauges 2 :  $S = 4.06 N/V$

Grâce à ces pente nous pouvons donc faire la conversion entre le voltage mesuré et le moment subit.

### III.3 Calcul de la vitesse d'écoulement

Un calcul d'hydraulique instationnaire est nécessaire pour calcul la vitesse d'entrée dans la section en fonction de la pression générée par la colonne de glycérine. La figure III.3 représente le montage expérimentale et les différents paramètres nécessaires pour le calcul.

L'écoulement étant laminaire et incompressible, on peut utiliser alors les équations de Bernoulli généralisées entre les point 1 et 4 :

$$\frac{V_1^2}{2g} + z_1 + \frac{P_1}{\rho g} = \alpha \frac{V_4^2}{2g} + z_4 + \frac{P_4}{\rho g} + \sum \text{pertes de charge} \quad (\text{III.7})$$

$$\frac{V_1^2 - \alpha V_4^2}{2g} + (z_1 - z_4) + \frac{P_1 - P_4}{\rho g} - \sum \text{pertes de charge} = 0 \quad (\text{III.8})$$

Nous allons simplifier cette équation :

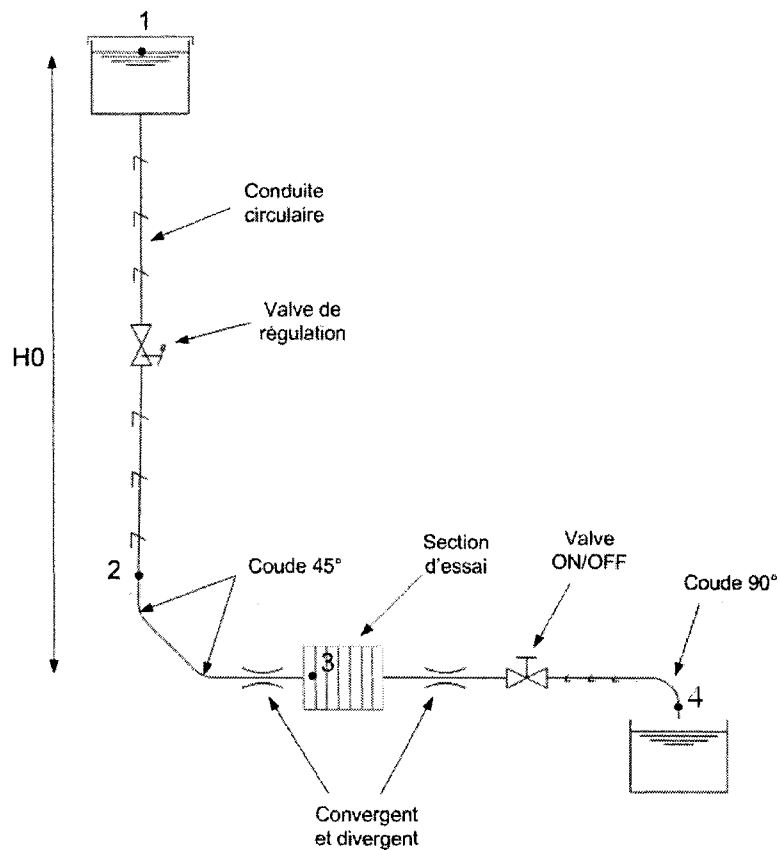


FIG. III.3 Schéma hydraulique du montage expérimental.

- Le débit  $Q$  étant le même partout dans la conduite nous avons :

$$V_1 = \frac{A_{\text{section}}}{A_{\text{réservoir}}} V_3 = k_1 V_3 \quad (\text{III.9})$$

$$V_2 = V_4 = \frac{A_{\text{section}}}{A_{\text{conduite}}} V_3 = k_2 V_3 \quad (\text{III.10})$$

On peut donc ramener la différence de vitesse  $V_1^2 - \alpha V_4^2$  à une relation fonction de la vitesse de section  $V_3^2$  :

$$V_1^2 - \alpha V_4^2 = (k_1 - \alpha k_2) V_3^2 \quad (\text{III.11})$$

- La différence de hauteur  $(z_1 - z_4)$  représente la hauteur  $H$  de colonne de glycérine



qui varie dans le temps lors de l'écoulement :

$$z_1 - z_4 = H = H_0 - V_1 t = H_0 - k_1 V_3 t \quad (\text{III.12})$$

- Les pressions  $P_1$  et  $P_4$  sont les pressions d'entrée et de sortie de conduite et toutes les deux égales à la pression atmosphériques. La différence est donc nulle.

Finalement, on répertorie les différentes pertes de charges présentes dans le système, nous avons :

- respectivement le changement de section entre le réservoir et la conduite, la conduite et la section d'essai puis la section d'essai et la conduite :

$$H_{rc} = \frac{1}{2} \frac{V_2^2}{2g} \quad ; \quad H_{cs} = \frac{1}{2} \frac{V_3^2}{2g} \quad ; \quad H_{sc} = \frac{1}{2} \frac{V_2^2}{2g} \quad (\text{III.13})$$

- la friction respectivement dans les conduites et dans la section d'essai :

$$H_c = f \frac{L_1}{D} \frac{V_2^2}{2g} \quad ; \quad H_s = f \frac{L_2}{D} \frac{V_3^2}{2g} \quad (\text{III.14})$$

Avec en régime laminaire le coefficient de friction de  $f = \frac{64}{Re} = \frac{64\mu}{V^2}$

- Les 2 coudes à  $\beta = 45$  degrés et le coude  $\beta = 90$  degrés :

$$H_\beta = \beta \left( 0.131 + 0.163 \left( \frac{D}{R} \right)^{3.5} \right) \quad (\text{III.15})$$

- les 2 vannes :

$$H_{vanne} = s_g \left( \frac{Q}{C_v} \right)^2 \quad (\text{III.16})$$

$s_g$  la gravité spécifique du liquide,  $Q$  le débit et  $C_v$  le coefficient d'écoulement donné par le constructeur ( pour une vanne de 4 pouces de diamètre,  $C_v =$

665 gallons/min.

- la perte de charge due au faisceau de tubes, trouvé par la simulation numérique :

$$H_{config} = 20 \frac{V_3^2}{2g} \quad (\text{III.17})$$

En contrepartie de la perte de charge, nous devons prendre en compte le fait que nous utilisons la vitesse moyenne mais nous avons en réalité un profil de vitesse non-uniforme, ce qui crée une force vive qui contrecarre la perte de charge, on la modélise par le coefficient de force vive  $\alpha$  égal à  $\alpha = 2$  en régime laminaire.

En prenant en considération toute ces relations, nous obtenons donc l'évolution dans le temps de la vitesse d'entrée de section  $V_3$  en résolvant l'équation suivante :

$$(k_1 - \alpha k_2)V_3^2 - k_1 V_3 t + \sum \text{pertes de charge} + H_0 = 0 \quad (\text{III.18})$$

La fig. III.4 montre l'évolution de la vitesse d'entrée de la section d'essai en prenant les dimensions de la modélisation finale CAO.

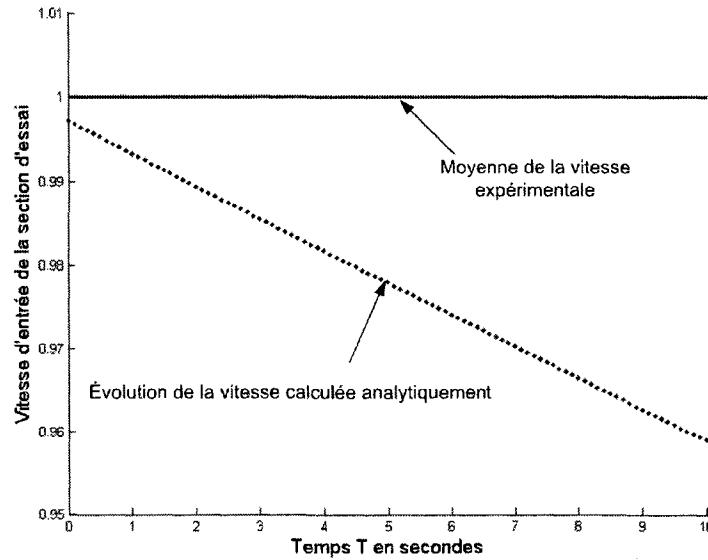
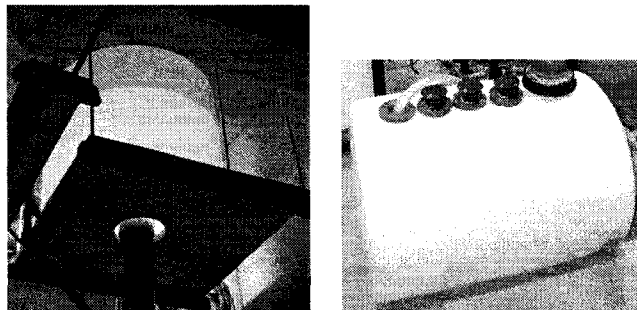


FIG. III.4 Vitesse analytique dans la section d'essai.

### III.4 Montage

Le montage expérimental est constitué de divers composants :

- Un réservoir D30' x H25' (haut) et D27 x H27 x L37 (bas) :



Réservoir haut

Réservoir bas

FIG. III.5 Réservoirs de glycérine

- Une section d'essai :



FIG. III.6 Section d'essai et guidage linéaire.

- Une valve de régulation et une valve ON/OFF :

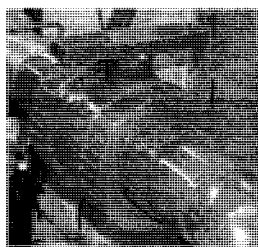
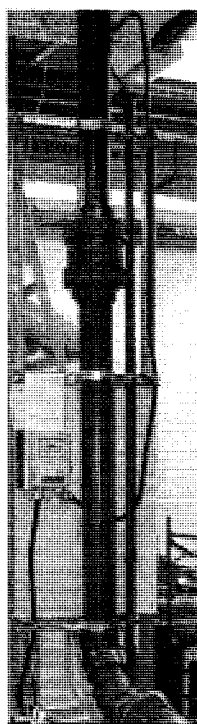


FIG. III.7 Valves de régulation et ON/OFF.

- 250 Litres de Glycérine ACS.
- Une tuyauterie 4' pour l'écoulement et 1' pour le retour avec une pompe 2HP triphasée contrôlée par un variateur de fréquence  $[1 - 60Hz]$  :



Tuyauterie 4'



Tuyauterie 1'



Variateur de fréquence

FIG. III.8 Tuyauteries

- Des évents pour laisser l'air s'échapper lors la descente et montée de la glycérine :

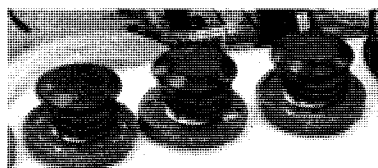


FIG. III.9 Évents.

### III.5 Mesure de la vitesse réelle

Pour récupérer la vitesse réelle de la glycérine, nous avons procédé par traitement d'image. L'écoulement étant laminaire et la glycérine très visqueuse, le niveau de liquide dans le réservoir du haut est très peu perturbé lors de sa descente. Ainsi, en faisant le contraste entre l'air et la glycérine grâce à un éclairage du réservoir et en prenant ce dernier en vidéo lors de l'écoulement, il est ensuite possible par traitement d'image de sortir la vitesse. Pour cela on procède de la façon suivante :

- On transforme la vidéo en série d'images noir et blanc avec ffmpeg.
- On transforme les images en matrices, les couleurs sont encodées par un entier compris entre 0 et 256, 0 étant une teinte très sombre et 256 une teinte très claire. On récupère alors un vecteur colonne de cette matrice, représentant une verticale de l'image du réservoir (Fig. III.10 ).

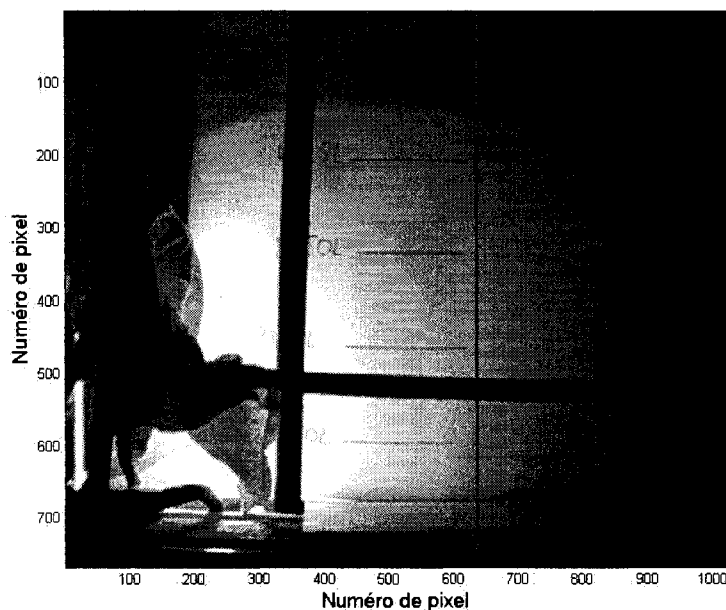


FIG. III.10 Image Noir et Blanc du réservoir et vecteur colonne.

- L'interface air-glycérine est représenté par un passage rapide de sombre (air) à clair (glycérine), et donc par un saut de valeur dans la matrice. (Fig .III.11).

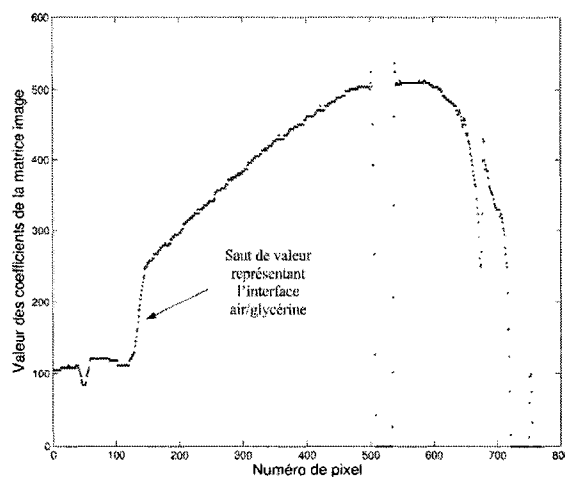


FIG. III.11 Vecteur colonne étudié.

- Le niveau de glycérine descendant dans le temps, le nombre correspondant au l'interface sombre/clair ou encore air/glycérine va descendre dans l'image et donc dans la matrice. Pour connaître le déplacement de la glycérine, on interpole la zone d'inflexion maximale et on suit son déplacement dans la matrice image (Fig. III.12).

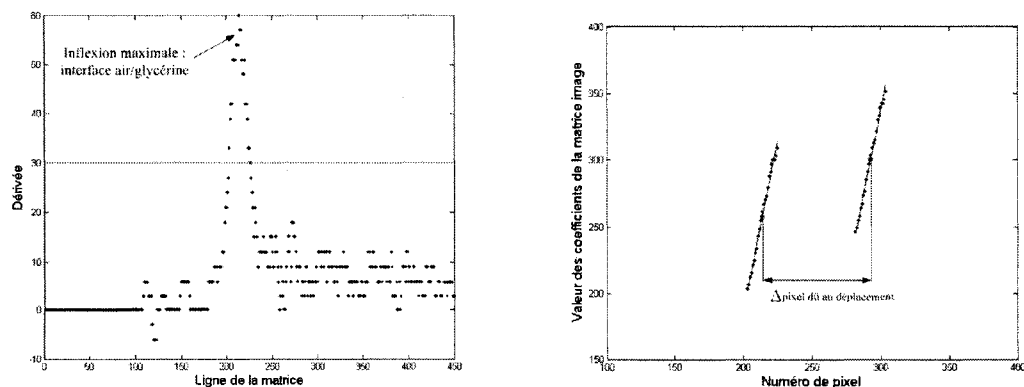


FIG. III.12 Évolution de la ligne air/glycérine

- On obtient alors, le déplacement dans le temps de ce nombre. Une approximation par la méthode des moindres carrés nous donne alors une droite de déplacement (Fig. III.13).

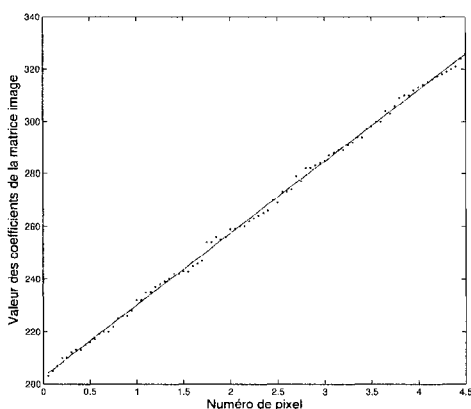


FIG. III.13 Déplacement du point d'inflexion et regression

- La dérivée est alors la vitesse  $V$  en pixel/image. Il faut donc récupérer le rapport pixel/distance  $R_{pd}$ . Pour cela, on prend un vecteur de la matrice localisé au niveau des graduations. Des marques bleues séparées de 4 pouces ont été faites sur le réservoir, on voit alors que le passage de blanc à bleu se répercute dans la matrice par un passage d'un haut nombre à un petit nombre.

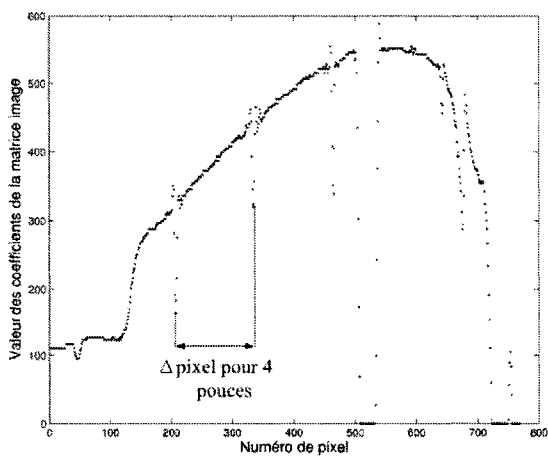


FIG. III.14 Mesure du rapport pixel/distance photo de l'image.

- Nous prenons un écart de  $T = 0.05sec$  entre deux images. La vitesse obtenue étant celle de la glycérine dans le réservoir du haut, on calcule alors la vitesse  $V_s$  dans la section d'essai de la façon suivante :

$$V_s = \frac{R_{pd}}{T} \cdot \frac{A_{rservoir}}{A_{section}} V \quad (III.19)$$

Une regression linéaire du déplacement permet ainsi d'obtenir une vitesse moyenne dans le temps. Des régressions paraboliques ont été faite donnant ainsi non plus une vitesse constante mais une vitesse évoluant linéairement dans le temps, le comportement étant assez proche de la solution analytique. Cependant, dépendemment de l'éclairage du réservoir la droite de déplacement est plus ou moins bonne et la regression parabolique ne marche pas toujours. La vitesse moyenne obtenue avec une regression linéaire fût donc la meilleure solution.



## ANNEXE IV

### CALCUL DE RECONSTRUCTION 3D DE LA SOLUTION NUMÉRIQUE

#### IV.1 Détermination du profil de vitesse dans une section carrée

On considère une section carrée de longueur  $2L$  et l'on veut connaître le profil de l'écoulement laminaire et développé du fluide au travers. En raison des symétrie évidente de la section d'essai le calcul est simplifié si nous nous plaçons entre  $-L$  et  $L$ . L'équation de Stokes donne donc  $\forall (y, z) \in [-L, L; -L, L]$  :

$$\nabla^2 u(y, z) = -\frac{\partial P}{\partial x} \quad (\text{IV.1})$$

Soit

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = cte \quad (\text{IV.2})$$

Avec une vitesse nulle sur les frontières :

$$u(-L, z) = u(L, z) = u(y, -L) = u(y, L) = 0 \quad (\text{IV.3})$$

La solution est formée d'une fonction solution de l'équation homogène et d'une solution particulière. Les deux solutions sont symétriques suivant  $y$  et  $z$ , on doit pouvoir alors interchanger les variables et obtenir la même fonction :

$$u(y, z) = u(z, y) \quad \forall (y, z) \in [-L, L; -L, L] \quad (\text{IV.4})$$

On propose alors que la solution  $u_H$  soit de la forme :

$$u_H = f(y)g(z) + g(y)f(z) \quad (\text{IV.5})$$

Chaque terme de  $u_H$  doit être solution de l'équation homogène  $\nabla^2 u(y, z) = 0$  :

$$f''(y)g(z) + f(y)g''(z) = 0 \quad (\text{IV.6})$$

Ce qui donne :

$$\frac{f''}{f} = -\frac{g''}{g} \quad (\text{IV.7})$$

$f$  et  $g$  étant des fonctions différentes, la seule solution possible pour vérifier IV.6 et IV.7 est que les deux termes soient nuls, ce qui donne les deux équations différentielles suivantes :

$$f'' - f = 0 \quad (\text{IV.8})$$

$$g'' + g = 0 \quad (\text{IV.9})$$

Les fonctions  $f$  et  $g$  sont alors de la forme :

$$f(y) = \cosh(y) \quad (\text{IV.10})$$

$$g(z) = \cos(z) \quad (\text{IV.11})$$

La seule fonction  $u_H = f(y)g(z) + g(y)f(z)$  ne peut remplir les conditions aux limites IV.3, on postule qu'une série entière de fonction pourrait remplir ces conditions :

$$u_H(y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n (\cosh(\beta_n y) \cos(\beta_n z) + \cos(\beta_n y) \cosh(\beta_n z))) \quad (\text{IV.12})$$

On prend comme solution particulière est :

$$u_P(y, z) = - \left( \frac{(y^2 - L^2)}{L^2} + \frac{(z^2 - L^2)}{L^2} \right) \quad (\text{IV.13})$$

La solution de l'équation générale est alors :

$$u(y, z) = V_0 \left[ \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n (\cosh(\beta_n y) \cos(\beta_n z) + \cos(\beta_n y) \cosh(\beta_n z))) - \left( \frac{(y^2 - L^2)}{L^2} + \frac{(z^2 - L^2)}{L^2} \right) \right] \quad (\text{IV.14})$$

Nous devons donc trouver les termes  $\beta_n$  et  $\alpha_n$  qui nous permettent de vérifier les conditions aux frontières.

Soit  $E$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions continues de  $[-L; L]$  dans  $\mathbb{R}$ . L'application  $\Phi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}, (f, g) \rightarrow \int_{-L}^L fg$  est un produit scalaire sur  $E$ . Le groupe  $\{\cos(\beta_n z)\}$  formant une base orthogonale dans  $E$ . Il peut donc être judicieux de prendre une forme de  $\beta_n$  qui fait apparaître une somme de fonction cosinus pour ensuite trouver les différents  $\alpha_n$  en utilisant le produit scalaire.

Nous prenons une définition des termes  $\beta_n$  qui nous permettent d'annuler une partie de la somme et ainsi de simplifier l'équation :

$$\beta_n = \frac{\frac{\pi}{2} + (n-1)\pi}{L} \quad (\text{IV.15})$$

On se place en  $y = L$ , alors tous les termes en  $\cos(\beta_n L)$  s'annulent :

$$u(L, z) = V_0 \left[ \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n (\cosh(\beta_n L) \cos(\beta_n z))) - \frac{(z^2 - L^2)}{L^2} \right] \quad (\text{IV.16})$$

Les conditions aux frontières donnent  $u(L, z) = 0$  :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cosh(\beta_n L) \cos(\beta_n z)) - \frac{(z^2 - L^2)}{L^2} = 0 \quad (\text{IV.17})$$

On peut retrouver les termes  $\alpha_n$  en faisant le produit scalaire de  $u(L, z)$  par  $\cos(\beta_i z)$  :

$$\int_{-L}^L \left[ \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cosh(\beta_n L) \cos(\beta_n z)) - \frac{(z^2 - L^2)}{L^2} \right] \cos(\beta_i z) dz = \int_{-L}^L 0 \cdot \cos(\beta_i z) dz \quad (\text{IV.18})$$

Soit :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \alpha_n \int_{-L}^L \cosh(\beta_n L) \cos(\beta_n z) \cos(\beta_i z) dz \right) = \int_{-L}^L \frac{(z^2 - L^2)}{L^2} \cos(\beta_i z) dz \quad (\text{IV.19})$$

Le terme de gauche peut s'écrire :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \alpha_n \int_{-L}^L \cosh(\beta_n L) \cos(\beta_n z) \cos(\beta_i z) dz \right) = \alpha_i \cosh(\beta_i L) \int_{-L}^L \cos(\beta_i z)^2 dz \quad (\text{IV.20})$$

Ce qui donne l'égalité :

$$\underbrace{\alpha_n \cosh(\beta_n L) \int_{-L}^L \cos(\beta_i z)^2 dz}_{I_1} = \underbrace{\int_{-L}^L \left( \frac{(z^2 - L^2)}{L^2} \cos(\beta_i z) \right) dz}_{I_2} \quad (\text{IV.21})$$

Avec pour  $I_1$  la relation suivante :

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \alpha_i \cosh(\beta_i L) \int_{-L}^L \cos(\beta_i z)^2 dz \\
 &= \alpha_i \cosh(\beta_i L) \int_{-L}^L \frac{(1 + \cos(2\beta_i z))}{2} dz \\
 I_1 &= \alpha_i L \cosh(\beta_i)
 \end{aligned} \tag{IV.22}$$

$I_2$  nécessite quelques lignes de calculs :

$$I_2 = \int_{-L}^L \frac{z^2}{L^2} \cos(\beta_i z) dz - \int_{-L}^L \cos(\beta_i z) dz \tag{IV.23}$$

On effectue une intégration par partie en prenant :

$$\begin{cases} u(z) = z^2 \\ v'(z) = \cos(\beta_i z) \end{cases} \quad \begin{cases} u'(z) = 2z \\ v(z) = \frac{1}{\beta_i} \sin(\beta_i z) \end{cases}$$

Le terme  $I_2$  devient alors :

$$I_2 = \left[ \frac{z^2}{\beta_i L^2} \sin(\beta_i z) \right]_{-L}^L - \int_{-L}^L \frac{2z}{\beta_i L^2} \sin(\beta_i z) dz - \int_{-L}^L \cos(\beta_i z) dz \tag{IV.24}$$

On refait une intégration par partie en prenant :

$$\begin{cases} u(z) = 2z \\ v'(z) = \sin(\beta_i z) \end{cases} \quad \begin{cases} u'(z) = 2 \\ v(z) = -\frac{1}{\beta_i} \cos(\beta_i z) \end{cases}$$

Ce qui donne finalement :

$$I_2 = \left[ \frac{z^2}{\beta_i L^2} \sin(\beta_i z) \right]_{-L}^L + \left[ \frac{2z}{\beta_i^2 L^2} \cos(\beta_i z) \right]_{-L}^L - \int_{-L}^L \frac{2}{\beta_i^2 L^2} \cos(\beta_i z) dz - \int_{-L}^L \cos(\beta_i z) dz \quad (\text{IV.25})$$

Une dernière intégration nous donne :

$$I_2 = \left[ \frac{z^2}{\beta_i L^2} \sin(\beta_i z) \right]_{-L}^L + \left[ \frac{2z}{\beta_i^2 L^2} \cos(\beta_i z) \right]_{-L}^L - \left[ \frac{2}{\beta_i^3 L^2} \sin(\beta_i z) \right]_{-L}^L - \left[ \frac{1}{\beta_i} \sin(\beta_i z) \right]_{-L}^L \quad (\text{IV.26})$$

or :

$$\begin{aligned} [\sin(\beta_i z)]_{-L}^L &= \left[ \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + (i-1)\pi}{L} z\right) \right]_{-L}^L \\ &= 2 \cdot (-1)^{i-1} \end{aligned} \quad (\text{IV.27})$$

Ce qui donne finalement :

$$I_2 = \frac{4(-1)^{i-1}}{\beta_i^3} \quad (\text{IV.28})$$

Par identification  $I_1 = I_2$  donne :

$$\alpha_i = \frac{4(-1)^i}{\beta_i L \cosh(\beta_i L)} \quad (\text{IV.29})$$

En conclusion le profil de vitesse pour un écoulement développé dans une section

carrée est :

$$u(y, z) = V_0 \left[ \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n (\cosh(\beta_n y) \cos(\beta_n z) + \cos(\beta_n y) \cosh(\beta_n z))) - \left( \frac{(y^2 - L^2)}{L^2} + \frac{(z^2 - L^2)}{L^2} \right) \right] \quad (\text{IV.30})$$

avec pour  $\beta_n$  et  $\alpha_n$  les définitions suivantes :

$$\beta_n = \frac{\frac{\pi}{2} + (n-1)\pi}{L} \quad \text{et} \quad \alpha_n = \frac{4(-1)^n}{\beta_n L \cosh(\beta_n L)} \quad (\text{IV.31})$$

#### IV.1.1 Détermination de la vitesse de référence $V_0$

Il ne reste plus qu'à définir  $V_0$ . Nous voulons obtenir le profil de vitesse dans la section du système expérimental, la moyenne de  $u(y, z)$  représente donc la vitesse expérimentale mesurée  $V_{exp}$  :

$$V_{exp} = \frac{1}{4L^2} \int_{-L}^L \int_{-L}^L u(y, z) dy dz = \int_0^1 \int_0^1 u(yL, zL) dy dz \quad (\text{IV.32})$$

En développant :

$$V_{exp} = \int_0^1 \int_0^1 u(yL, zL) dy dz \quad (IV.33)$$

$$\begin{aligned} \frac{V_{exp}}{V_0} &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \int_0^1 \int_0^1 ((\cosh(\beta_n Ly) \cos(\beta_n Lz) + \cosh(\beta_n Lz) \cos(\beta_n Ly)) dy dz \\ &\quad - \int_0^1 \int_0^1 ((y^2 - 1) + (z^2 - 1)) dy dz \end{aligned} \quad (IV.34)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=1}^{\infty} 2\alpha_n \int_0^1 \int_0^1 \cosh(\beta_n Ly) \cos(\beta_n Lz) dy dz \\ &\quad - \int_0^1 \int_0^1 ((y^2 - 1) + (z^2 - 1)) dy dz \end{aligned} \quad (IV.35)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{\alpha_n}{\beta_n^2 L^2} \sinh(\beta_n L) \sin(\beta_n L) + \frac{4}{3} \quad (IV.36)$$

$$= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n-1} \tanh(\beta_n L)}{\beta_n^3 L} \sin(\beta_n L)}_{R3D} + \frac{4}{3} \quad (IV.37)$$

Nous obtenons alors la valeur de  $V_0$  pour obtenir un profil de vitesse dont la moyenne est la valeur mesurée expérimentalement :

$$V_0 = \frac{V_{exp}}{R3D} \quad (IV.38)$$



#### IV.1.2 Détermination du profil de vitesse expérimentale moyenne

Le profil de vitesse étant complètement défini, il ne reste plus qu'à calculer la vitesse expérimentale moyenne dans le plan  $z$  :

$$U_{exp,moy}(z) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L u(y, z) dy = \int_0^1 u(yL, z) dx \quad (IV.39)$$

En développant le calcul :

$$\begin{aligned} U_{exp,moy}(z) &= \int_0^1 u(yL, z) dy \\ &= V_0 \left[ \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \int_0^1 (\cosh(\beta_n yL) \cos(\beta_n z) + \cos(\beta_n yL) \cosh(\beta_n z)) dy) \right. \\ &\quad \left. - \left( \int_0^1 \frac{((yL)^2 - L^2)}{L^2} dy + \frac{(z^2 - L^2)}{L^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (IV.40)$$

La vitesse expérimentale moyenne est donc, pour tout plan  $z$  :

$$\begin{aligned} U_{exp,moy}(z) &= V_0 \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\alpha_n}{\beta_n L} (\sinh(\beta_n L) \cos(\beta_n z) + \sin(\beta_n L) \cosh(\beta_n z)) \right) \right. \\ &\quad \left. - \left( -\frac{2}{3} + \frac{(z^2 - L^2)}{L^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (IV.41)$$

## IV.2 Distribution du coefficient de force en fonction de $z$

### IV.2.1 Détermination de la vitesse de référence pour le profil numériques

On définit le nombre de Reynolds comme :

$$Re_{num} = \frac{\rho_{num} D_{num} V_{num}}{\mu_{num}} = \frac{V_{num}}{\mu_{num}} \quad (\text{IV.42})$$

$V_{num}$  représentant la vitesse moyenne numérique du profil 3D. Il nous faut donc définir le profil 3D de vitesse, dans une section carré  $[-L_{num}, L_{num}]$ , les dimensions provenant de la configuration de la simulation numérique. Le profil restant le même, seule la vitesse de référence  $V_0$  est à déterminer. Nous savons que la simulation numérique se fait avec des paramètres normalisés, la vitesse moyenne du profil 2D dans le plan  $z = 0$  est alors égal à 1 :

$$\begin{aligned} \int_0^1 u(yL_{num}, 0) dx &= 1 \\ V_0 \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \left( \alpha_n \int_0^1 (\cosh(\beta_n y L_{num}) + \cos(\beta_n y L_{num})) dy \right) \right. \\ &\quad \left. - \left( \int_0^1 \frac{(y^2 - L^2)}{L^2} dy - 1 \right) \right] = 1 \\ V_0 \left[ \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\alpha_n}{\beta_n} (\sinh(\beta_n L_{num}) + \sin(\beta_n L_{num})) \right)}_{R2D} + \frac{5}{3} \right] &= 1 \quad (\text{IV.43}) \end{aligned}$$

La vitesse de référence  $V_0$ , pour avoir une vitesse moyenne du profil 2D égale à 1, est donc :

$$V_0 = \frac{1}{R2D} \quad (\text{IV.44})$$

Or comme nous l'avons vu plus haut, la vitesse moyenne du profil 3D est :

$$V_{num} = V_0 R3D \quad (\text{IV.45})$$

Soit :

$$V_{num} = \frac{R3D}{R2D} \quad (\text{IV.46})$$

On définit alors la viscosité numérique comme :

$$\mu_{num} = Re_{exp}/V_{num} \quad (\text{IV.47})$$

## ANNEXE V

### RÉSULTATS POUR LE CALCUL D'INCERTITUDE

Toute procédure de mesure expérimentale s'accompagne d'une analyse d'incertitude afin d'indiquer jusqu'à quel point nous pouvons nous fier aux valeurs mesurées. Les sensibilités sont un outil intéressant pour effectuer de telles analyses. En effet l'incertitude d'une mesure représente sa variation par rapport aux différents paramètres qui influent sur le système de mesure.

Si l'on perturbe de  $\delta a_i$  une fonction  $\Phi$  dépendant des paramètres  $a_i$ , on peut la décomposer en effectuant un développement en série de Taylor :

$$\Phi(a_1 + \delta a_1, a_2 + \delta a_2, \dots) = \Phi(a_1, a_2, \dots) + \sum_{i=1}^n \delta a_i s_{\Phi}^{a_i} \quad (\text{V.1})$$

$\delta a_i s_{\Phi}^{a_i}$  représentant la contribution du paramètre  $a_i$  dans la variation de la fonction  $\Phi$ . Dans le cas où  $\delta a_i$  représente l'incertitude sur le paramètre  $a_i$ , alors  $\delta a_i s_{\Phi}^{a_i}$  représente l'incertitude engendrée par  $a_i$  sur la fonction  $\Phi$ .

Les sensibilités nous permettent donc d'obtenir les valeurs des différentes contributions à la perturbation de  $\Phi$ . Pour obtenir la contribution de chaque paramètre, nous voyons qu'il nous faut donc les différentes sensibilités de paramètres et les incertitudes sur ces paramètres. On détermine les sensibilités numériquement et on vient récupérer les incertitudes de paramètres en étudiant le système expérimental. De ces dernières incertitudes, il est important de comprendre que deux types existent :

- 1- Celle due à l'écart entre les valeurs nominales et les valeurs réelles des paramètres

du système expérimental (cotation, densité de fluide, viscosité de fluide, ...)

- 2- Celle due à la variation dans le temps de certains paramètres au moment des mesures.

La simulation numérique étant faite avec des valeurs nominales des paramètres d'écoulement, l'incertitude de type 1 va donc nous permettre de faire avec confiance les comparaisons entre résultats expérimentaux et numériques. L'incertitude de type 2, quant à elle, décrit plus le caractère de répétabilité des mesures. La différence entre l'incertitude de type 1 et celle de type 2 se traduit dans la quantification des incertitudes sur les paramètres qui influent sur le système expérimental. On répertorie les paramètres d'incertitude présents dans notre cas :

- Le positionnement du cylindre central de la configuration  $X_C$  et  $Y_C$ .
- Le débit du fluide  $Q = U_\infty \cdot A$ .
- La densité  $\rho$  et la viscosité  $\mu$  de la glycérine.
- Le diamètre  $D$  du cylindre.

Nous présentons ici deux calculs d'incertitude : celui sur les moments induits puis celui sur les dérivées de stabilité. Nous expliquerons, pour chaque cas, quel type d'incertitude nous étudions.

### V.1 Calcul d'incertitude sur les moments induits

Ici, les fonctions  $\Phi$  se trouvent donc être les moment  $M_L$  et  $M_D$ . L'estimation de l'incertitude nous permet donc de comparer les valeurs expérimentales et numériques des moments, nous calculons alors l'incertitude de type 1.

L'incertitude totale  $I_{tot}$  sur le moment  $M$ , portance comme trainée, est donc :

$$I_{tot} = \Delta X_C s_M^{X_C} + \Delta Y_C s_M^{Y_C} + \Delta U s_M^U + \Delta \rho s_M^\rho + \Delta D s_M^D + \Delta \mu s_M^\mu \quad (V.2)$$

Il suffit donc de calculer les différentes sensibilités, pour cela développons la sensibilité de  $M$  par rapport à un paramètre  $a$  :

$$\frac{\partial M}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a} \int_0^L \frac{1}{2} \rho D U^2(z) C(z) z dz \quad (V.3)$$

$$= \int_0^L \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial a} (\rho D U^2(z) C(z)) z dz \quad (V.4)$$

$$= \int_0^L \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial (\rho D U^2(z))}{\partial a} C(z) + \rho D U^2(z) \frac{\partial C}{\partial a}(z) \right] z dz \quad (V.5)$$

Pour pouvoir obtenir la sensibilité du moment par rapport aux paramètres d'incertitude il faut donc connaître la sensibilité  $s_C^a(z) = \partial C / \partial a(z)$  du coefficient de force par rapport à ces paramètres d'incertitude. Bien sûr, les sensibilités trouvées numériquement ne peuvent être utilisées directement car leur valeur provient d'un calcul avec des paramètres normalisés, il faut alors trouver le lien entre les sensibilités numériques et les sensibilités relatives à notre expérience. Pour cela, nous utilisons la sensibilité adimensionnelle.

Soit une fonction  $\Phi$  et un paramètre  $a$ , on définit la fonction adimensionnelle  $\tilde{\Phi}$  et le paramètre  $\tilde{a}$  comme :

$$\tilde{\Phi} = \frac{\Phi}{\Phi_0} \quad ; \quad \tilde{a} = \frac{a}{a_0}$$

Où  $\Phi_0$  et  $a_0$  sont les valeurs de référence prise pour adimensionnaliser le problème (

on prend généralement  $\tilde{a} = 1$ ).

La sensibilité adimensionnelle est alors  $S_{\tilde{\Phi}}^{\tilde{a}}$  et est liée à la sensibilité numérique par :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{a}} &= \frac{\partial a}{\partial \tilde{a}} \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) \\
 &= a_0 \left( -\frac{\frac{\partial \Phi_0}{\partial a}}{\Phi_0^2} \Phi + \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial a}}{\Phi_0} \right) \\
 &= a_0 \left( \frac{1}{\Phi_0} \frac{\partial \Phi}{\partial a} - \frac{\partial \Phi_0}{\partial a} \cdot \frac{\Phi}{\Phi_0^2} \right) \\
 &= a_0 \left( \frac{1}{\Phi_0} \frac{\partial \Phi}{\partial a} - \frac{\partial \Phi_0}{\partial \tilde{a} a_0} \cdot \frac{\Phi}{\Phi_0^2} \right) \\
 &= a_0 \left( \frac{1}{\Phi_0} \frac{\partial \Phi}{\partial a} - \frac{\partial \Phi_0}{\partial a_0} \cdot \frac{\Phi}{\tilde{a} \Phi_0^2} \right) \\
 \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{a}} &= a_0 \left( \frac{1}{\Phi_0} S_{\Phi}^a - S_{\Phi_0}^{a_0} \cdot \frac{\tilde{\Phi}}{\tilde{a} \Phi_0} \right)
 \end{aligned} \tag{V.6}$$

Ainsi on obtient :

$$S_{\tilde{\Phi}}^{\tilde{a}} = \frac{a_0}{\Phi_0} \left( S_{\Phi}^a - \frac{\tilde{\Phi}}{\tilde{a}} S_{\Phi_0}^{a_0} \right) \tag{V.7}$$

Les paramètres adimensionnelles pour notre cas sont définis comme suit :

$$\tilde{U} = \frac{U}{U_0} \quad ; \quad \tilde{\mu} = \frac{\mu}{\mu_0} \quad ; \quad \tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0} \quad ; \quad \tilde{D} = \frac{D}{D_0} \tag{V.8}$$

En prenant pour la force, la relation suivante :

$$\tilde{F} = \frac{F}{F_0} = \frac{F}{\rho_0 D_0 U_0^2} = \frac{1}{2} C \tag{V.9}$$

Les fonctions étudiées sont les forces induites donc  $\Phi = F$ .

Alors :

$$\Phi = F \quad ; \quad \Phi_0 = \rho_0 U_0^2 D_0 \quad ; \quad \tilde{\Phi} = \frac{F}{\rho_0 U_0^2 D_0} = \frac{1}{2} C \quad (\text{V.10})$$

Donc :

$$S_C^{\tilde{a}} = 2 \frac{a_0}{F_0} \left( S_F^a - \frac{1}{2} C S_{F_0}^{a_0} \right) \quad (\text{V.11})$$

Or les paramètres  $\rho$ ,  $U$ ,  $D$  et  $\mu$  sont liés par le nombre de Reynolds  $R_e = \rho U D / \mu$ .

Il en résulte qu'une même variation relative d'un des paramètres résulte en une même variation du nombre de Reynolds. Cela donne donc l'égalité suivante :

$$\frac{\partial R_e}{\partial \tilde{U}} = \frac{\partial R_e}{\partial \tilde{\rho}} = \frac{\partial R_e}{\partial \tilde{D}} = - \frac{\partial R_e}{\partial \tilde{\mu}} \quad (\text{V.12})$$

On en déduit donc pour le coefficient de force :

$$\frac{\partial C}{\partial \tilde{U}} = \frac{\partial C}{\partial \tilde{\rho}} = \frac{\partial C}{\partial \tilde{D}} = - \frac{\partial C}{\partial \tilde{\mu}} \quad (\text{V.13})$$

Nous pouvons donc trouver les contributions à l'incertitude totale de la vitesse  $U$ , la densité  $\rho$  et la viscosité  $\mu$  avec seulement la sensibilité adimensionnelle  $S_C^{\tilde{U}}$ . Cela nous donne aussi une autre possibilité de vérifier le bon calcul des sensibilités. Le paramètre  $D$  a un statut particulier, en effet si l'on change sa valeur, alors on change la géométrie de la configuration, les relations dues au nombre de Reynolds ne tiennent alors plus car la similitude géométrique n'est plus respectée. Il faudra donc le calculer à part. Pour estimer l'incertitude sur les mesures, il suffit de connaître l'évolution des sensibilités adimensionnelles des coefficients de force en fonction des



déplacement  $(X_C, Y_C)$ , du diamètre  $D$  et de la vitesse  $U$ . On retrouve les sensibilités  $s_C^a$  grace à la relation suivante :

$$s_C^a(z) = \frac{1}{a_0} s_C^{\tilde{a}}(z) \quad (\text{V.14})$$

Après avoir calculé les différentes valeurs des sensibilités pour différents  $Re$ , nous interpolons puis intégrons les résultats pour obtenir les différentes sensibilités puis l'incertitude totale.

La table V.1 relate les valeurs des différentes sensibilités, en fonction de la vitesse moyenne à l'infini  $U_0$ , nécessaire au calcul d'incertitude de la mesure de  $M_L$  et  $M_D$  lorsque le cylindre  $C$  est au centre de la configuration ( la portance ne change pas selon  $X_C$  et la traînée ne change pas suivant  $Y_C$ ).

$Re_{loc}$	$\frac{\partial C_D}{\partial \tilde{U}}$	$\frac{\partial C_D}{\partial \tilde{D}}$	$\frac{\partial C_D}{\partial \tilde{X}}$	$\frac{\partial C_L}{\partial \tilde{Y}}$
32	-10.32	22.76	1.34	-17.32
28.8	-11.67	16.37	1.58	-20.15
25.6	-13.31	10.00	1.75	-23.56
22.4	-15.42	3.45	1.92	-27.80
19.2	-18.14	-3.44	2.00	-33.11
16	-21.96	-11.06	2.00	-40.32
12.8	-27.75	-20.25	1.875	-50.62
9.6	-37.31	-32.76	1.82	-64.66
6.4	-58.20	-55.26	1.82	-64.66
3.2	-118.6	-116.9	2.00	-99.0

TAB. V.1 Évolution des sensibilités adimensionnelles de paramètres suivant le nombre de Reynolds local pour la position  $0\%D$

Ainsi nous pouvons estimer l'incertitude totale grâce aux sensibilités des moments

par rapport aux paramètres  $a \in \{U, \rho, D, \mu, X_C, Y_C\}$  et leurs incertitudes  $\Delta a$ .

$$I_{tot} = \sum_{i=1}^n (\Delta X_i s_M^{X_i} + \Delta Y_i s_M^{Y_i}) + \Delta U s_M^U + \Delta \rho s_M^\rho + \Delta D s_M^D + \Delta \mu s_M^\mu \quad (\text{V.15})$$

Avec :

$$s_M^a = \int_0^L \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial (\rho D U^2(z))}{\partial a} C(z) + \rho D U^2(z) \frac{1}{a_0} \frac{\partial C}{\partial \tilde{a}}(z) \right] z dz \quad (\text{V.16})$$

$$s_M^a = \frac{1}{a_0} s_M^{\tilde{a}} \quad (\text{V.17})$$

Les tables V.2 et V.3 donnent les valeurs sensibilités des moments par rapport à une perturbation de  $\tilde{a}$ .

Position	$\frac{\partial M_D}{\partial \tilde{Y}_C}$	$\frac{\partial M_L}{\partial \tilde{Y}_C}$	$\frac{\partial M_D}{\partial \tilde{X}_C}$	$\frac{\partial M_L}{\partial \tilde{X}_C}$	$\frac{\partial M_D}{\partial \tilde{D}}$	$\frac{\partial M_L}{\partial \tilde{D}}$
0%D	0.000	-1.106	0.067	0.000	2.000	0.000
4%DX	0.000	-1.160	0.178	0.000	2.010	0.000
4%DY	-0.031	-1.134	0.069	-0.0475	2.000	-1.015

TAB. V.2 Sensibilités normalisées pour la traînée et la portance

Position	$\frac{\partial M_D}{\partial \tilde{\rho}}$	$\frac{\partial M_L}{\partial \tilde{\rho}}$	$\frac{\partial M_D}{\partial \tilde{U}}$	$\frac{\partial M_L}{\partial \tilde{U}}$	$\frac{\partial M_D}{\partial \tilde{\mu}}$	$\frac{\partial M_L}{\partial \tilde{\mu}}$
0%D	0.2778	0.0000	0.9750	0.0000	0.5650	0.0000
4%DX	0.2767	0.0000	0.9770	0.0000	0.5700	0.0000
4%DY	0.2777	-0.0015	0.9750	-0.00178	0.5640	-0.0248

TAB. V.3 Sensibilités normalisées pour la traînée et la portance

La dernière étape nécessaire pour le calcul de ces incertitudes est la quantification des incertitudes sur les paramètres de l'écoulement.

Pour comparer les moments expérimentaux avec ceux calculés numériquement, nous devons connaître nos incertitudes sur les différents paramètres de l'écoulement dues aux imprécisions des mesures ou celles de l'usinage. Les valeurs expérimentales des paramètres d'écoulement sont :

$$\rho_{nom} = 1243 \text{ kg/m}^3 \pm 0.5 \quad (\text{V.18})$$

$$D_{nom} = 0.750 \text{ pouce} \pm 0.001 \quad (\text{V.19})$$

$$V_{nom} = 0.8 \text{ m/s} \pm 0.01 \quad (\text{V.20})$$

$$\mu_{nom} = 0.85 \text{ Nm}^{-2}\text{s} \pm 0.02 \quad (0.5 \text{ °Celsius d'imprécision}) \quad (\text{V.21})$$

$$X_C = 0.0 \text{ po} \pm 0.005 \quad (\text{V.22})$$

$$Y_C = 0.0 \text{ po} \pm 0.005 \quad (\text{V.23})$$

On quantifie donc l'incertitude avec les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} \Delta\rho &= 0.5 \text{ kg/m}^3 & ; & & \Delta D &= 0.001 \text{ po} & ; & & \Delta V &= 0.01 \text{ m/sec} \\ \Delta\mu &= 0.02 \text{ Nm}^{-2}\text{s} & ; & & \Delta X_C &= 0.005 \text{ po} & ; & & \Delta Y_C &= 0.005 \text{ po} \end{aligned} \quad (\text{V.24})$$

La table V.4 donne les incertitudes par rapport aux valeurs nominales des moments calculées numériquement pour les moments de trainée et portance à la position 0%D.

Position	$I_{tot}(M_L)$	$I_{tot}(M_D)$
0%D	0.00737	0.02860

TAB. V.4 Incertitudes sur les mesures expérimentales par rapport aux valeurs nominales

Ainsi, les valeurs mesurées expérimentalement devraient se trouver dans l'intervalle  $[M_{num} - I_{tot}(M), M_{num} + I_{tot}(M)]$ .

$$M_{Dexp} = 0.842 \text{ Nm} \pm 0.028 \quad (\text{V.25})$$

$$M_{Lexp} = 0.000 \text{ Nm} \pm 0.007 \quad (\text{V.26})$$

## V.2 Calcul d'incertitude sur les dérivées de stabilité

L'estimation de l'incertitude sur les dérivées de stabilité se définit mathématiquement en utilisant la même procédure que pour l'incertitude sur les moments. Pour cela, on définit la plage d'incertitude de la sensibilité des moments par rapport aux déplacements  $X_C$  et  $Y_C$  du cylindre central. Nous devons donc calculer, par exemple pour  $s_M^{X_C}$  :

$$\begin{aligned} I_{tot}(s_M^{X_C}) = \Delta X_C s_M^{X_C, X_C} + \Delta Y_C s_M^{Y_C, X_C} &+ \Delta U s_M^{U, X_C} + \Delta \rho s_M^{\rho, X_C} \\ &+ \Delta D s_M^{D, X_C} + \Delta \mu s_M^{\mu, X_C} \end{aligned} \quad (\text{V.27})$$

Les sensibilités croisées  $s_M^{a, X_C}$ , avec  $a \in [X_C, Y_C, U, \rho, D, \mu]$  étant :

$$s_M^{a, X_C} = \int_0^L \frac{1}{2} \rho D U^2(z) \frac{\partial C}{\partial a \partial X_C}(z) z dz \quad (\text{V.28})$$

Nous avons la même relation pour  $Y_C$ . Comme nous pouvons le voir, pour connaître l'incertitude de type 1 de  $s_M^{X_C}$  et  $s_M^{Y_C}$ , il nous faut connaître les dérivées secondes des coefficients de force par rapport à  $X_C$  et  $Y_C$  ainsi que les dérivées croisées décrivant le comportement de  $s_M^{X_C}$  suivant la variation des paramètres d'écoulement. Il faut donc calculer numériquement les sensibilités d'ordre deux, données que le code numérique ne calcule pas présentement. Avoir une estimation de l'incertitude sur les dérivées de stabilité est cependant une chose importante pour assurer une bonne validation des calculs numériques. Afin d'obtenir ces estimations, nous avons donc calculé les incertitudes sur les moments pour les positions  $0\%D$ ,  $4\%DX$  et  $4\%DY$  puis obtenu ainsi les incertitudes sur les dérivées de stabilité par différence finie.

Quantifier l'incertitude de type 1 sur les dérivées de stabilité en faisant une différence finie ne reflète absolument pas la réalité (valeur beaucoup trop élevées), nous nous sommes alors tournés vers une estimation de l'incertitude de type 2.

Pour quantifier les variations des paramètres d'écoulement, il faut comprendre comment le système expérimental se comporte. Le système d'étalon de mesure nous permet de placer le cylindre central avec la précision des mesures des étalons. La plupart de l'imprécision que nous avons sur la vitesse vient du système de mesure, sa vraie variation durant les essais est bien plus faible car nous répétons exactement la même procédure pour chaque mesure. En ce qui concerne la viscosité, le moyen de déplacement du cylindre sans vider le réservoir nous permet d'obtenir une température quasi-constante, ce qui amène aussi une variation quasiment nulle de la densité. On quantifie donc l'incertitude de type 2 avec les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} \Delta\rho &= 0.0\text{kg}/\text{m}^3 & ; & & \Delta D &= 0.0\text{pouce} & ; & & \Delta V &= 0.001\text{m}/\text{sec} \\ \Delta\mu &= 0.005\text{Nm}^{-2}\text{s} & ; & & \Delta X_C &= 0.001\text{pouce} & ; & & \Delta Y_C &= 0.001\text{pouce} \end{aligned} \quad (\text{V.29})$$

Comme vu précédemment, nous estimons l'incertitude sur les dérivées de stabi-

lité par différence finie. Il nous faut donc calculer l'incertitude sur les moments de trainée et portance pour les trois positions : centrale ( $0\%D$ ), déplacé suivant  $Y$  ( $4\%DY$ ), et déplacé suivant  $X$  ( $4\%DX$ ). Cela entraîne qu'il faut connaître la distribution des sensibilités suivant le nombre de Reynolds local. Afin de réduire le nombre de simulations numériques à faire, nous postulons que la variation des coefficients de forces par rapport au nombre de Reynolds local est le même en  $0\%D$  et  $4\%DX$ . Ainsi pour  $4\%DX$ , il suffit de calculer les coefficients de force pour  $Re_{loc} = 32$  qui donne le point de départ de la courbe d'interpolation. Ce postulat ne peut cependant fonctionner en  $4\%DY$  car les coefficients de forces et sensibilités nuls en  $0\%D$  ne le sont plus en  $4\%DY$ .

La table V.5 donne les valeurs des coefficients de forces et leurs sensibilités adimensionnelles pour l'écoulement dans le plan  $z = L$  ( $Re_{loc} = 32$ ) lorsque le cylindre central est déplacé en  $4\%DX$ .

$Re_{loc}$	$C_D$	$\frac{\partial C_L}{\partial Y_C}$	$\frac{\partial C_D}{\partial X_C}$	$\frac{\partial C_D}{\partial D}$	$\frac{\partial C_D}{\partial U}$
32.0	17.1	-18.52	3.90	22.90	-10.44

TAB. V.5 Sensibilités de paramètres pour un nombre de Reynolds local de 32 pour la position  $4\%DX$

La table V.6 relate les valeurs des différentes sensibilités en fonction de la vitesse moyenne à l'infini  $U_0$ , lorsque le cylindre  $C$  est à la position  $4\%DY$ .

$Re_{loc}$	$\frac{\partial C_D}{\partial \tilde{U}}$	$\frac{\partial C_L}{\partial \tilde{U}}$	$\frac{\partial C_D}{\partial \tilde{D}}$	$\frac{\partial C_L}{\partial \tilde{D}}$	$\frac{\partial C_D}{\partial \tilde{Y}}$	$\frac{\partial C_L}{\partial \tilde{Y}}$	$\frac{\partial C_D}{\partial \tilde{X}}$	$\frac{\partial C_L}{\partial \tilde{X}}$
32.0	-10.34	1.00	22.76	-19.5	-0.58	-17.94	1.4	-1.28
28.8	-11.70	0.81	24.47	-21.16	-0.74	-20.76	1.65	-1.23
25.6	-13.31	0.52	26.65	-23.18	-0.88	-24.28	1.84	-1.09
22.4	-15.47	0.18	29.47	-25.80	-1.02	-28.61	1.96	-0.90
19.2	-18.21	-0.24	33.33	-29.22	-1.06	-34.16	2.05	-0.64
16.0	-22.04	-0.72	38.80	-34.0	-1.04	-41.60	2.08	-0.36
12.8	-27.75	-1.51	47.50	-40.75	-0.96	-51.50	2.00	0.10
9.6	-37.31	-2.85	62.89	-50.89	-1.77	-64.66	1.78	1.22
6.4	-58.10	-4.86	93.50	-70.50	-5.0	-80.00	1.80	3.90
3.2	-119.0	-6.92	186.0	-129.4	-14.0	-96.00	1.80	10.0

TAB. V.6 Évolution des sensibilités adimensionnelles pour la traînée et la portance suivant  $Re_{loc}$

Toutes les données nécessaires ayant été énoncées, cela donne les incertitudes sur les moments suivantes :

Position	$I_{tot}(M_L)$	$I_{tot}(M_D)$
4% $DX$	0.0014	0.0049
4% $DY$	0.0020	0.0047

TAB. V.7 Incertitudes sur les séries de mesure

Comme énoncé précédemment, on calcule les incertitudes sur les sensibilités en faisant une différence finie entre l'incertitude du moment en  $-4\%$  et celle en  $4\%$  :

$$I_{tot}(s_M^X) = \frac{2I_{tot}(M)}{\Delta X} \quad (V.30)$$

Nous procédons de la même façon suivant  $Y$ .

Les incertitudes de sensibilité sont alors :

$I_{tot}(s_{M_L}^X)$	$I_{tot}(s_{M_D}^X)$	$I_{tot}(s_{M_L}^Y)$	$I_{tot}(s_{M_D}^Y)$
0.0225	0.147	0.0600	0.141

TAB. V.8 Incertitudes sur les séries de mesure

Cette méthode n'est donc qu'une approximation. En effet, elle prend en compte les variations des dérivées due aux variations des paramètres d'écoulement d'une mesure à l'autre mais ne prend pas en compte les écarts entre les dérivées expérimentales et numériques due aux écarts avec les valeurs nominales (que l'on trouverait avec les dérivées croisées). Le comportement des paramètres étant assez linéaire aux alentours de 0%, nous pouvons espérer que ces dérivées croisées soient assez faibles.

Ainsi, les valeurs mesurées expérimentalement des dérivées de stabilité devraient se trouver dans l'intervalle  $[s_{M_{num}}^X - I_{tot}(s_M^X), s_{M_{num}}^X + I_{tot}(s_M^X)]$  et nous avons la même relation pour  $Y$ .

$$s_{M_L}^X = 0.000 Nm/m \pm 0.022 Nm/m \quad (V.31)$$

$$s_{M_D}^X = 0.070 Nm/m \pm 0.147 Nm/m \quad (V.32)$$

$$s_{M_L}^Y = -0.977 Nm/m \pm 0.060 Nm/m \quad (V.33)$$

$$s_{M_D}^Y = 0.000 Nm/m \pm 0.141 Nm/m \quad (V.34)$$